DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING TIBBIYOTDA QO‘LLANILISHI

O‘zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti
Aniq va amaliy fanlar fakulteti talabasi
Axmatova Mahliyo Akmal qizi

Annotatsiya. Ushbu maqola differensial tenglamalarning matematik asoslari va ularning turli sohalardagi keng ko‘lamli amaliy qo‘llanilishiga bag‘ishlangan. Maqolada differensial tenglamalarning asosiy turlari, yechish usullari va ularning tabiiy fanlar, muhandislik, iqtisodiyot va boshqa sohalardagi muhimligi ko‘rib chiqiladi.

Kalit so‘zlar: Differensial tenglama, SIR-modeli, Covid-19, model, Koshi masalasi.

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Annotation. This article is dedicated to the mathematical foundations of differential equations and their wide-ranging practical applications in various fields. The article discusses the basic types of differential equations, their solution methods, and their importance in natural sciences, engineering, economics, and other fields.

Keywords: Differential equation, SIR-model, Covid-19, model, the Koshi issue.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Аннотация. Данная статья посвящена математическим основам дифференциальных уравнений и их широкому практическому применению в различных областях. В статье рассматриваются основные типы дифференциальных уравнений, методы их решения и их важность в естественных науках, инженерии, экономике и других областях.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, SIR-модель, модель, задача Коши.

Kirish. Differensial tenglamalar fizika, mexanika, differensial geometriya, variatsion hisob, issiqlik texnikasi, elektrotexnika, kimyo, biologiya va iqtisod kabi fanlarda keng qo‘llaniladi. Bu fanlarda uchraydigan ko‘plab jarayonlar differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi. Shu tenglamalarni o‘rganish bilan tegishli jarayonlar haqida biror ma’lumotga, tasavvurga ega bo‘lamiz. O‘sha differensial tenglamalar, o‘rganilayotgan jarayonning matematik modelidan iborat bo‘ladi. Bu model qancha mukammal bo‘lsa, differensial tenglamalarni o‘rganish natijasida olingan ma’lumotlar jarayonlarni shuncha to‘la tavsiflaydi. Shuni aytib o‘tish kerakki, tabiatda uchraydigan turli jarayonlar bir xil differensial tenglamalar bilan tavsiflanishi mumkin.

Ta'rif. *Differensial tenglama deb, erkli o'zgaruvchi x, noma'lum funksiya yva uning hosilalari orasidagi bog'lanishdan iborat bo'lgan tenglamaga aytiladi.*

U simvolik ravishda

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishda yoziladi.

Bunda F ko'rilayotgan sohada o'z argumentlarining uzluksiz funksiyasidir. (1) tenglamada erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya va uning hosilalardan bir nechtasi qatnashmasligi mumkin. Lekin u differensial tenglama bo'lsa, u holda hosilalardan hech bo'lmaganda bittasi qatnashishi shart.

Differensial tenglama tarkibiga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga, differensial tenglamaning tartibi deyiladi.

Masalan (1) tenglama, n -chi tartibli differensial tenglamadir.

Agar tenlamadagi noma'lum funksiya faqat bitta erkli o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday tenglamaga *oddiy differensial tenglama* deyiladi (ODT).

Agar tenglamadagi noma'lum funksiya bir nechta erkli o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, tenglamada har bir erkli o'zgaruvchilar bo'yicha olingan xususiy hosilalar qatnashishi mumkin. Bunday differensial tenglamalarga xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Masalan, $u(x, y)$ funksiya ikkita x,y agrumentlarga bog'liq bo'lsin. U holda

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (2)$$

tenglamaga ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3)$$

ga esa birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Birinchi tartibli ODTning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (4)$$

dan iborat.

Agar bu tenglamani y'ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa ya'ni

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{yoki} \quad y' = f(x, y) \qquad (5)$$

tenglamaga hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglama deyiladi.

Agarda,

$$y = \psi(x, c) \qquad (6)$$

(6) funksiya, (5) tenglamani qanoatlantirsa, unga tenglamaning *umumiy yechimi* deyiladi. Bunda c - ixtiyoriy o'zgarmas son (parametr). Ba'zi vaqtlarda umumiy yechim oshkormas

$$F(x, y, c) = 0 \qquad (7)$$

ravishda berilishi mumkin (7) yechimga, tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

Tenglamaninng umumiy $y = \psi(x, c)$ yechimi yoki umumiy $F(x, y, c) = 0$ integrali, geometrik nuqtayi nazardan, bitta parametrga bog'liq bo'lgan egri chiziqlar oilasini ifodalaydi. Tekislikda har bir yechim egri chiziqdan iborat. Unga tenglamaning integral chizig'i deyiladi. (5) tenglamani geometrik nuqtayi nazardan tekshiramiz.

x va yo‘zgaruvchini tekislikdagi nuqtaning dekart koordinatalari uchun qabul qilsak, u holda $f(x,y)$ funksiya aniqlangan G sohaning har bir x,ynuqtasiga (5) tenglama, G sohaning har bir nuqtadan o‘tuvchi integral chiziqqa o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyentini ifodalaydi. Boshqacha aytganda $\frac{dy}{dx}$ qiymatini mos qo’yadi.$\frac{dy}{dx}$ ning qiymati, $y=\phi(x)$ integral chizig‘ining ixtiyoriy nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning absissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchakning tangensini bildiradi. Ya‘ni har bir nuqtada urinmaning yo‘nalishini aniqlaydi. Biz yo‘nalishlar maydoniga ega bo‘lamiz.

Demak, geometrik nuqtayi nazardan birinchi tartibli differensial tenglamani yechish, shunday chiziqlarni topish kerakki, uning har bir nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning yo‘nalishi, shu nuqtadagi yo‘nalishlar maydoniga mos kelsin.

Ta’rif. *Bir xil yo‘nalish maydoniga ega bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rniga izoklina deyiladi.*

Izoklinalarga ko‘ra, differensial tenglamalarning integral chiziqlarni chizish mumkin.

Izoklinalar usuli

Hosilaga nisbatan yechilgan quyidagi birinchi tartibli differensial tenglama berilgan bo‘lsin

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{5}$$

Differensial tenglamaning integral chiziqlarini chizish uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak.

1. Agar berilgan differensial tenglama hosilaga nisbatan yechilmagan bo‘lsa, dastavval uni hosilaga nisbatan yechib olamiz.
2. Integral chiziqlarning chapdan o‘ngga tomon harakat etganda, uning yo‘nalishini aniqlaymiz.

Agar

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)>0$$

sharti bajarilgan sohada integral chiziqlar yuqoriga qarab yo‘naladi.

Agar

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)<0$$

sharti bajariladigan sohada integral chiziqlar pastga qarab yo‘naladi.

3. Differensial tenglamaning izoklinarlar oilasi tenglamasini tuzamiz

$$f(x,y)=k \qquad (k=0;\quad \pm 1;\quad 2,\ldots).$$

bunda k-parametr. Bu izoklinalar ichida eng ahamiyatlisi $k=0; k=\pm 1$ qiymatdagi izoklinadir. $\mathrm{k}=0$bo‘lganda berilgan differensial tenglama

$$f(x,y)=0$$

ko‘rinishni oladi.

Bu integral chiziqlarning maksimum va minimum yotadigan nuqtalarining geometrik o‘rni bo‘lib, bunda

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f_x'(x,y)>0 \end{cases}$$

sharti bajariladigan sohada integral chiziqlarining minimum nuqtalari yotadi.

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ f_x'(x,y) < 0 \end{cases}$$

sharti bajariladigan sohada integral chiziqlarning maksimum nuqtalari yotadi.
$k = -1$ bo‘lsa, $f(x,y) = -1$ izoklinani hosil qilamiz.

Integral chiziqlar, bu izoklina bilan kesishgan nuqtalarida burchak koeffisiyenti –1 ga teng bo‘lgan urinmalarga ega bo‘ladi. Ya’ni ular o‘zaro 135^0 burchak ostida kesishadi $k = 1$ bo‘lganda $f(x,y) = 1$ izoklina tenglamasiga ega bo‘lamiz.

Integral chiziqlari bu izoklina chizig‘i bilan burchak koeffisiyenti $tg\phi = 1$ ya’ni 45^0 burchak ostida kesishadi. Integral chiziqlarni yanada aniqroq chizish uchun bukilish nuqtalarining geometrik o‘rnini topamiz.

Ma’lumki, bukilish nuqtalarining geometrik o‘rni, ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirish yo‘li bilan aniqlanadi. (5) tenglamaga asosan $y"$ ni topamiz:

$$y" = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = f_x'(x,y) + f(x,y)f_y"(x,y).$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$f_x'(x,y) + f(x,y)f_y'(x,y) = 0 \qquad (8)$$

(8) tenglama bilan aniqlanuvchi chiziq bukulish nuqtalarining geometrik o‘rnini aniqlaydi. Bunda $y" = f'_x + ff'_y > 0$shartini qanoatlantiruvchi sohada integral chiziqlari botiq (∪) bo’lib, $y" = f_x' + f \cdot f_y' < 0$shartni qanotlantiruvchi sohada integral chiziqlari qavariq (∩) bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan ma’lumotlarga asoslanib, berilgan differensial tenglamaning integral chiziqlarini chizish mumkin.

Misol. $y' = 2x - y$ tenglamaning integral chiziqlarini, izoklina yordamida chizing.

Yechish. Dastavval, integral chiziqlarning harakat yo‘nalishlarini aniqlaymiz.

Agar $y' = 2x - y > 0$ bo‘lsa, $y < 2x$ bo‘ladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi sohada integral chiziqlar yuqoriga qarab yo‘naladi.(↑)

Agar $y' = 2x - y < 0$ bo‘lsa, $y > 2x$ bo’ladi. Bu sohada integral chiziqlar pastga qarab yo‘naladilar.(↓)

Izoklinalar oilasining tenglamasini tuzamiz:
$y' = 2x - y = k$bundan $y = 2x - k$, $k = 0$ bo‘lsin. U holda $y = 2x$ ga ega bo‘lamiz.
Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} f(x,y) = 2x - y = 0 \\ f_x'(x,y) = 2 > 0 \end{cases}.$$

Bundan $y = 2x$to‘g‘ri chizig‘ida integral chiziqlarning minimum nuqtalari yotadi. Integral chiziqlar maksimum nuqtaga ega emas. Chunki $x$va$y$ning ko‘rilayotgan sohadagi hamma qiymatlari uchun $f_x'(x,y) = 2 > 0$.

Faraz qilaylik, $k = 1$ bo‘lsin. U holda$y = 2x - 1$ ga ega bo‘lamiz. Integral chiziqlar bu to‘g‘ri chiziq bilan 45^0 burchak ostida kesishadi. Agar $k = -1$bo‘lsa, u holda $y = 2x + 1$ ga ega bo‘lamiz. Integral chiziqlar bu to‘g‘ri chiziq bilan 135^0 burchak ostida kesishadi. Agar $k = 2$bo’lsa, u holda $y = 2x - 2$ ga ega bo‘lamiz. Bu berilgan tenglamani yechimi bo‘ladi. Haqiqatan ham

$y' = 2, 2 \equiv 2x - 2x + 2$ tenglamaning integral chiziqlari bu integral chiziq bilan kesishmaydi.

Endi bukilish nuqtalarining geometrik o‘rnini aniqlaymiz. Buning uchun berilgan tenglamadan

$$y'' = 2 - y'$$
$$2 - 2x + y = 0.$$

Bundan $y = 2x - 2$ga ega bo’lamiz. Ushbu bukilish nuqtalarining geometrik o‘rni esa, $y > 2x - 2$shart qanoatlantiruvchi sohada integral chiziqlari botiq, $y < 2x - 2$ shart qanoatlantiruvchi sohada integral chiziqlari qavariq bo‘ladi. Bu ma’lumotlarga ko‘ra, integral chiziqlarni chizish mumkin.

Koshi masalasi.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tenglama uchun Koshi masalasi deb, $x = x_0$ bo’lganda $y(x_0) = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimni topishga aytiladi. Koshi masalasini yechish uchun, dastlab berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi $y = \phi(x, c)$ topiladi, so‘ngra $x = x_0$ $y(x_0) = y_0$ boshlang‘ich shartlar yordamida parametr $c$ning qiymati $c = c_0$ aniqlanadi. $y = \phi(x, c)$ yechimdagi c o’rniga c_0 qo‘ysak Koshi shartini qanoatlantiruvchi $y = \phi(x, c_0)$ yechimga ega bo‘lamiz.

Ta’rif. (5) *differensial tenglamaning Koshi masalasini qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ yechimi xususiy yechim deyiladi. Ya’ni, boshqacha qilib aytganda, barcha nuqtalarida yagonalik sharti bajaraladigan yechim xususiy yechim deyiladi.*

Differensial tenglamalarning amaliyotda qo‘llanilishi

Differensial tenglamalar ilm-fanning deyarli barcha sohalariga kirib borgan. Fizika, muhandislik, biologiya va tibbiyot, kimyodan tortib iqtisodiyot va moliya sohalarigacha. Zamonamizning muhim amaliy masalalari differensial hisob orqali o‘z yechimini topmoqda. Xususan, meterologiya va iqlimshunoslik sohalarida ob-havoni prognoz qilish jarayonida ham differensial tenglamalar nazariyasidan foydalaniladi. Aerokosmik sohada ham samolyot, raketa va boshqa uchar jismlarning harakat trayektoriyalari ham aynan differensial tenglamalar yordamida tuziladi. Barcha sohalarda differensial tenglamalarning ahamiyati beqiyos, ammo bugun asosiy e’tiborni biologiya va tibbiyot sohasiga qaratsak.

Differensial tenglamalar tibbiyot va biologiyada juda muhim rol o‘ynaydi. Chunki, ular tirik organizmlar va biologik tizimlardagi o‘zgarishlarni matematik jiihatdan modellashtirish va tushuntirish uchun vosita hisoblanadi. Ayniqsa tibbiyotda differensial tenglamalar turli kasalliklarning tarqalish dinamikasi, rivojlanish tezligi, davolanishga ta’sir etuvchi omillarni o‘rganishga yordam beradi.

Epidemiyalar, xususan Covid-19 tarqalishini modellashtirish uchun differensial tenglamalardan foydalaniladi. Zamonamiz olimlari Covid-19 virusining tarqalish jarayonini modellashtirishda SIR (Sucseptible – Infected – Recovered) modelidan foydalanganlar. Bu model aholini 3 ta qatlamga ajratadi:

S (Sucseptible - sezgir): Kasallikka chalinish ehtimoli bo‘lgan, ammo hozirda infeksiyani yuqtirmaganlar.

I (Infected – infeksiyalangan): Kasallangan va uni yuqtirishi mumkin bo‘lgan shaxslar.

R (Recovered – tuzalgan): Kasallikdan tuzalgan va uni qayta yuqtirmaydigan shaxslar.

SIR modeli quyidagi differensial tenglamalar bilan ifodalaniladi

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}, \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I\ , \qquad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

bu yerda S(t)- vaqtning t momentidagi sezgir shaxslar soni bo‘lsa, I(t) – t vaqtdagi infeksiyalangan shaxslar va R(t) – t vaqtda tuzalgan yoki immunitetga ega shaxslar sonini ifodalovchi funksiyalar.

N = S + I + R - umumiy aholi soni (vaqt o'tishi bilan o'zgarmas deb taxmin qilinadi). β - infeksiya tarqalish tezligi. γ - tuzalish tezligi (infeksiyalangan shaxslarning tuzalish ehtimoli yoki immunitetga ega bo'lish tezligi). Aynan β va γ kattaliklarni topish uchun ehtimollar nazariyasiga murojaat qilinadi.

Bizga differensial tenglamalar nazariyasidan ma’lumki $\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt}$ kattaliklar vaqt birligi ichida mos ravishda sezgir, infeksiyalangan va tuzalgan shaxslar sonining o‘zgarish tezliklarini ifodalaydi.

Yuqorida berilgan differensial tenglamalar hayotiy qanday ma’no kasb etishiga to‘xtalsak. $\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}$ tenglama sezgir shaxslar sonining kamayishi infeksiyalangan shaxslar bilan aloqa qilish tezligiga bog‘liq ($\frac{\beta SI}{N}$). Har bir sezgir shaxs infeksiyalangan shaxs bilan aloqa qilganda va infeksiya yuqsa, sezgir guruhdan chiqadi. $\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$ infeksiyalangan shaxslar sonining o'zgarishi, yangi infeksiyalanganlar soni ($\frac{\beta SI}{N}$) va tuzalganlar soni (γI) o‘rtasidagi farqga bog‘liq. $\frac{dR}{dt} = \gamma I$ tuzalgan shaxslar sonining o‘sishi infeksiyalangan shaxslarning tuzalish tezligiga bog‘liq.

SIR modeli COVID-19 kabi yuqumli kasalliklarning tarqalish dinamikasini tushunishga yordam beradi. U epidemiologlarga: kasallikning cho'qqisini qachon kutish kerakligini taxmin qilishga; kasallikning tarqalish tezligini baholashga; turli xil aralashuv choralarining (masalan, karantin, niqob taqish, emlash) ta'sirini modellashtirishga; resurslarni (masalan, kasalxona yotoqlari, tibbiy jihozlar) rejalashtirishga yordam beradi.

Ammo shuni ham ta’kidlab o‘tmoq kerakki, bu model soddalashtirilgan bo‘lib, real hayotdagi murakkab omillarni to‘la hisobga olish imkoniyatiga ega emas hamda β va γ parametrlarning kuzatishlar asosida qanchalik to‘g‘ri baholanishiga ham bog‘liq. Yanada ko‘proq hayotiy parametrlarni o‘z ichiga olgan modellari qurish mumkin.

Xulosa

Xulosa qilib aytganda, SIR modeli differensial tenglamalar yordamida COVID-19 tarqalishini matematik jihatdan modellashtirishning asosiy usullaridan biri bo‘lib, bu kasallikning dinamikasini tushunish va unga qarshi kurashish strategiyalarini ishlab chiqishda muhim rol o‘ynaydi.

FOYDANILGAN ADABIYOTLAR

1. Salohiddinov M.S., Nasriddinov G‘.N. Oddiy differensial tenglamalar. T: 1994.
2. Jo‘rayev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 2-q. T.: “O‘zbekiston”. 1999.
3. Hikmatov A.G., Toshmetov O‘.T., Karesheva K., Matematik analizdan mashq va masalalar to‘plami. T.: 1987.