ISSIQLIK O'TKAZUVCHANLIK TENGLAMASI UCHUN UMUMLASHGAN KOSHI MASALASI

Tanirbergenov Muratbek Bazarbaevich,
Qoraqalpoq davlat universiteti, dotsent,
tanirbergenovmuratbek384@gmail.com,
_+998913845097_
Sobitov Sardorbek Oybek o'g'li,
Qoraqalpoq davlat universiteti, 2-kurs magistranti
sobitovsardorbek0425@gmail.com, +998931200425

Annotatsiya: ushbu maqolada issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun umumlashgan Koshi masalasi ko'rib chiqilgan. Avval klassik Koshi masalasi tushunchasi, keyin esa u umumlashtirilgan holda bayon etiladi. Puasson formulasi yordamida umumlashgan yechim ikki issiqlik potensiali ko'rinishida ifodalanadi. Maqolada fundamental yechimlar, issiqlik tarqalish operatori va umumlashgan funksiyalar sinflari ko'rsatilib, misol asosida amaliy yechim ko'rsatiladi.

Kalit so'zlar: issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi, umumlashgan yechim, Puasson formulasi, issiqlik potensiali, fundamental yechim, issiqlik o'tkazuvchanlik operatori.

Kirish

Qattiq jismlar va muhitlar orqali issiqlik tarqalishini modellashtirishda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi muhim o'rin tutadi. Bu tenglama fizikaviy jarayonlarning matematik modeli bo'lib, turli sohalarda, xususan, muhandislik va tabiiy fanlarda keng qo'llaniladi. Mazkur maqolada ushbu tenglama uchun Koshi masalasining umumlashtirilgan ko'rinishi o'rganiladi. Umumlashgan yechimlar sinfi, tegishli teoremalar va fundamental yechimlar yordamida masalaning nazariy asoslari yoritiladi hamda misol asosida amaliy qo'llanilishi ko'rsatiladi.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun klassik Koshi masalasi deganda $C^2(t>0)\cap C(t\geq 0)$ sinfga tegishli va $x\in\mathbb{R}^n, t>0$ uchun quyidagi tenglamani

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t) \tag{1}$$

va ushbu boshlang'ich

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \tag{2}$$

shartni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiyasini topish masalasi tushuniladi, bunda $f(x,y)$ va $u_0(x)$ - berilgan funksiyalar.

Agar $u(x,t)$ - (1)-(2) klassik Koshi masalasining yechimi bo'lsa va $f(x,y)\in C$ funksiyasi $t<0$ da nolga teng bo'lib davom etsa, ya'ni

$$\tilde{f}=\begin{cases} f, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

bo'lsa, u holda $u(x,t)$ funksiyasi umumlashgan ma'noda quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$u_t=a^2\Delta u+f(x,t)+u_0(x)\delta(t) \qquad (3)$$

Agar $F(x,t)\in D'(□^{n+1})$ va $t<0$ da $F(x,t)=0$ bo'lsa, u holda $t<0$ da nolga aylanadigan va $□^{n+1}$ da issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini qanoatlantiruvchi umumlashgan $u\in D'$ funksiyani topish masalasiga – issiqlik tarqalish tenglamasi uchun umumlashgan Koshi masalasi deyiladi:

$$u_t=a^2\Delta u+F(x,t) \qquad (4)$$

□ orqali $□^{n+1}$ da aniqlangan, $t<0$ da nolga aylanadigan va har bir $0\leq t\leq T$, $x\in □^n$ uchun quyidagi

$$|f(x,t)|\leq C_{T,\varepsilon}(f)e^{\varepsilon|x|^2}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $f(x,y)$ funksiyalar sinfini belgilaymiz ($\forall\varepsilon>0$). $□_0$ bilan esa $□^n$ da aniqlangan va $\forall\varepsilon>0$ da quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfini belgilaymiz:

$$|f(x,t)|\leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|^2}$$

Teorema [1, 2]. Agar $F(x,t)=f(x,t)+u_0(x)\delta(t)$, bunda $f(x,t)\in □$ va $u_0\in □_0$, bo'lsa, u holda (3) Koshi masalasining yechimi mavjud va yagona bo'ladi va bu yechim □ sinfida aniqlangan ikkita issiqlik potensiallari yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi (Puasson formulasi):

$$u(x,t)=V(x,t)+V^{(0)}(x,t) \qquad (5)$$

Bunda

$$V(x,t)=f(x,t)*\mathrm{E}(x,t)=\int_0^t\int\frac{f(\xi,\tau)}{\left(4\pi(t-\tau)\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

$$V^{(0)}(x,t)=\left(u_0(x)\delta(t)\right)*\mathrm{E}(x,t)=\frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int u_0(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}d\xi$$

va $\mathrm{E}(x,t)$ funksiyasi quyidagi issiqlik o'tkazuvchanlik operatorini qanoatlantiruvchi fundamental yechim:

$$\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta=\delta(x,t)$$

Misol [3]. Quyidagi issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimini toping:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+e^{-t}\cos x \\ u\big|_{t=0}=\cos x \end{cases}$$

Yechish. Bu misol uchun umumlashgan Koshi masalasi quyidagicha bo'ladi:

$$\tilde{u}_t-\tilde{u}_{xx}=\theta(t)e^{-t}\cos x+\delta(t)\cos x$$

Ushbu masalaning umumlashgan funksiyalardagi yechimi o'ram orqali topiladi. Buning uchun $V^{(0)}(x,t)=\mathrm{E}(x,t)*\delta(t)\cos x$ - issiqlik sirt potensiali va quyidagi ma'lum tengliklardan foydalanamiz:

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

$$\mathrm{E}(x,t)=\frac{\theta(t)}{2a}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

1) $\mathrm{E}(x,t)*\delta(t)\cos x=\mathrm{E}(x,t)*\cos x=\int\limits_{R^1}\cos\xi\cdot\mathrm{E}(x-\xi,t)d\xi=$

$$=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{R^1}\cos\xi\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi=\left|\begin{matrix}\beta=1, & \alpha^2=\dfrac{1}{4t}, \\ \alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}, & \lambda=\xi-x.\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}\cos(\lambda+x)d\lambda=$$

$$=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\left(\cos x\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}d\lambda+\sin x\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\lambda\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}d\lambda\right)=$$

$$\frac{\theta(t)\cos x}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}e^{-\frac{1}{\frac{1}{t}}}=\theta(t)\cos x\cdot e^{-t}$$

2)

$$=\iint\limits_{R^2}\theta(\xi)e^{-\xi}\cos\xi\cdot E(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau=$$

$$= \iint_{R^2} \theta(\xi) e^{-\xi} \cos\xi \cdot \frac{\theta(t-\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{R^1} \frac{e^{-\tau}\cos\xi}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} d\xi d\tau = \int_0^t \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda + x) \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{4(t-\tau)}} d\lambda \right) d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left(\cos x \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{4(t-\tau)}} d\lambda - \sin x \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\lambda \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{4(t-\tau)}} d\lambda \right) d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-t} \cos x \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = \cos x \cdot e^{-t} \int_0^t d\tau = t e^{-t} \cos x$$

Ushbu hisoblangan natijalarga ko’ra oxirgi javob quyidagicha bo’ladi:

$$u(x,t) = (t + \theta(t)) e^{-t} \cos x = (1+t)\cos x, \;\; t > 0$$

Xulosa

Maqolada issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun umumlashgan Koshi masalasi o’rganildi. Puasson formulasidan foydalanib nazariyaning amaliyotda foydalanilishi ko’rsatildi. Ushbu yondashuv matematik fizika masalalarini nazariy va amaliy yechishda muhim ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar ro’yxati

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва, «Наука», 1976 г., 225-230 b.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. Москва, «Наука», 1979 г., 320 b.
3. В.С. Владимирова, Москва, ФИЗМАТЛИТ, Сборник задач по уравнениям математической физики // Под редакцией, 2001., 159-160 b.

Tanirbergenov Muratbek Bazarbaevich
Qoraqalpoq davlat universiteti, dotsent
e-mail:
Sobitov Sardorbek Oybek o’g’li
Qoraqalpoq davlat universiteti, 2-kurs magistrant
e-mail: sobitovsardorbek0425@gmail.com