YUQORI TARTIBLI HOSILALAR VA ULARNING TATBIQLARI

G'aniyeva Malika Murodjon qizi-*Andijon davlat pedagogika insituti*
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Mamajonova Maftuna Noyibjon qizi-*Andijon davlat pedagogika insituti*
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Yunusova Aziza Mirzajon qizi- *Andijon davlat davlat pedagogika insituti*
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Elektron pochta: ganiyevamalika40@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada yuqori tartibli hosilaning asosiy tushunchalari va ularning matematik tahlildagi o'rni yoritilgan. Yuqori tartibli hosilalar funksiyaning yanada chuqurroq xossalarini aniqlashda muhim vosita hisoblanadi. Maqolada hosilaning fizikadagi, iqtisodiy modellardagi qo'llanilishiga alohida e'tibor qaratilgan. Shuningdek, differensial tenglamalarda yuqori tartibli hosilalarning ahamiyati ko'rib chiqilgan. Misollar orqali mavzuga oid nazariy bilimlar mustahkamlangan. Matematik model yaratishda yuqori tartibli hosilalar yordamida aniqlik darajasini oshirish mumkinligi ta'kidlangan. Mavzu talabalarga amaliy va nazariy bilimlarni uyg'unlashtirish imkonini beradi. Maqola matematik tahlil bilan shug'ullanuvchi talabalar va o'qituvchilar uchun foydali bo'lishi mumkin.

Abstract: This article covers the basic concepts of higher-order derivatives and their role in mathematical analysis. Higher-order derivatives are an important tool for determining deeper properties of a function. The article pays special attention to the application of derivatives in physics, engineering, and economic models. The importance of higher-order derivatives in differential equations and the theory of oscillations is also considered. Theoretical knowledge on the topic is reinforced through examples. It is emphasized that using higher-order derivatives in creating mathematical models can increase the level of accuracy. The topic allows students to combine practical and theoretical knowledge. The article may be useful for students and teachers involved in mathematical analysis.

Абстрактный:В статье рассматриваются основные понятия производных высшего порядка и их роль в математическом анализе. Производные высшего порядка являются важным инструментом для определения более глубоких свойств функции. Статья посвящена применению производных в физических и экономических моделях. Также рассматривается важность производных высшего порядка в дифференциальных уравнениях. Теоретические знания по теме закрепляются на примерах. Подчеркивается, что уровень точности может быть повышен за счет использования производных более высокого порядка при создании математической модели. Предмет позволяет студентам сочетать

практические и теоретические знания. Статья может быть полезна студентам и преподавателям, занимающимся математическим анализом.

Kalit so'zlar: Yuqori tartibli hosila, mexanik ma'no, n-chi tartibli, induktiv, Leybnits formulasi, tatbiq moddiy nuqta, matematik induksiya, ketma-ket hisoblash, o'zgaruvchi ko'paytuvchi, kasr-ratsional, differensial.

Keywords:Higher-order derivative, mechanical sense, n-th order, inductive, Leibniz formula, applied material point, mathematical induction, sequential calculation, variable multiplier, fractional-rational, differential

Ключевые слова: Производная высшего порядка, механическое значение, n-й порядок, индуктивный, формула Лейбница, прикладная материальная точка, математическая индукция, последовательное исчисление, переменный множитель, дробно-рациональный, дифференциал.

Kirish.

Ma'lumki, mexanikaning ko'pgina masalalari yuqori tartibli hosilalar yordamida yechiladi. Shu sababli bu hosilalarni o'rganish ham nazariy ham amaliy ahamiyatga egadir.

1. Yuqori tartibli hosila tushunchasi.

Faraz qilaylik, biror (a,b) da hosilaga ega $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila (a,b) da aniqlangan funksiya bo'ladi. Demak, hosil bo'lgan funksiyaning hosilasi, ya'ni hosilaning hosilasi haqida gapirish mumkin. Agar $f'(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, uni $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rif bo'yicha $y''(x)=(y')'$ ekan.

Shunga o'xshash, agar ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi mavjud bo'lsa, u uchinchi tartibli hosila deyiladi va y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ kabi belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha $y'''=(y'')'$.

Berilgan funksiyaning to'rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o'xshash aniqlanadi. Umuman $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilasining hosilasiga uning n-tartibli hosilasi deyiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha n-tartibli hosila $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ rekkurent (qaytma) formula bilan hisoblanar ekan.

Misol. $y=x^4$ funksiya berilgan. $y'''(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$, demak $y'''(2)=24\cdot 2=48$.

Yuqorida aytilganlardan, funksiyaning yuqori tartibli, masalan, *n*- tartibli hosilalarini topish uchun uning barcha oldingi tartibli hosilalarini hisoblash zarurligi kelib chiqadi. Ammo ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari uchun umumiy qonuniyatni topish va undan foydalanib formula keltirib chiqarish mumkin.

Misol tariqasida ba'zi bir elementar funksiyalarning *n*-tartibli hosilalarini topamiz.

1) $y=x^{\mu}$ $(x>0,\ \mu\in R)$ funksiya uchun $y^{(n)}$ ni topamiz. Buning uchun uning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz: $y'=\mu x^{\mu-1}$, $y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, . . .

Bundan

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-n+1)x^{\mu-n} \qquad (1)$$

deb induktiv faraz qilish mumkinligi kelib chiqadi. Bu formulaning $n=1$ uchun o'rinliligi yuqorida ko'rsatilgan. Endi (1) formula $n=k$ da o'rinli, ya'ni $y^{(k)}=\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)x^{\mu-k}$ bo'lsin deb, uning $n=k+1$ da o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'$. Shuning uchun

$$y^{(k+1)}=(y^{(k)})=(\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)x^{\mu-k})'=\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)(\mu-k)x^{\mu-k-1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (8.1) formulaning $n=k+1$ da ham o'rinli bo'lishini bildiradi. Demak, matematik induksiya usuliga ko'ra (8.1) formula $\forall n\in N$ uchun o'rinli.

(8.1) da $\mu=-1$ bo'lsin. U holda $y=\dfrac{1}{x}$ funksiyaning *n*-tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)...(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}} \qquad (2)$$

formula bilan topiladi.

2) $y=\ln x$ $(x>0)$ funksiyaning *n*-tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyainng birinchi hosilasi $y'=\dfrac{1}{x}$ bo'lishidan hamda (8.2) formuladan foydalansak,

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad (3)$$

formula kelib chiqadi.

3) $y=\sin x$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiya uchun $y'=\cos x$. Biz uni quyidagi

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$$

ko'rinishda yozib olamiz. So'ngra $y=\sin x$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$y''=(\cos x)'=-\sin x=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(IV)}) = (-\cos x)' = \sin x = \sin(x + 4\cdot\frac{\pi}{2})$$

Bu ifodalardan esa *y=sinx* funksiyainng *n*-tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (4)$$

formula kelib chiqadi. Uning to‘g‘riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Xuddi shunga o‘xshash

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \qquad (5)$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Masalan,

$$(\cos x)^{(115)} = \cos(x + 115\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x.$$

2. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosi.

Ikkinchi tartibli hosila sodda mexanik ma’noga ega. Faraz qilaylik moddiy nuqtaning harakat qonuni *s=s(t)* funksiya bilan aniqlangan bo‘lsin. U holda uning birinchi tartibli hosilasi *v(t)=s’(t)* harakat tezligini ifodalashi bizga ma’lum. Ikkinchi tartibli *a=v’(t)=s’’(t)* hosila esa harakat tezligining o‘zgarish tezligi, ya’ni harakat tezlanishini ifodalaydi.

Misol. Moddiy nuqta $s=5t^2+3t+12$ (*s* metrlarda, *t* sekundlarda berilgan) qonun bo‘yicha to‘g‘ri chiziqli harakat qilmoqda. Uning o‘zgarmas kuch ta’sirida harakat qilishini ko‘rsating.

Yechish. $s'=(5t^2+3t+12)'=10t+3;$ $s''=(10t+3)'=10,$ bundan $a=10m/s^2$ bo‘lib, harakat tezlanishi o‘zgarmas ekan. Nьyuton qonuni bo‘yicha kuch tezlanishga proportsional. Demak, kuch ham o‘zgarmas ekan.

Asosiy qism.

1. Yuqori tartibli hosilaning asosiy xossalari.

1-xossa. Agar *u(x)* va *v(x)* funksiyalar *n*-tartibli hosilalarga ega bo‘lsa, u holda bu ikki funksiya yig‘indisining *n* -tartibli hosilasi uchun

$$(u(x)+v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. Aytaylik $y=u+v$ bo‘lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz: $y'=u'+v'$, $y''=(y')'=(u'+v')'=u''+v''$.

Matematik induksiya metodidan foydalanamiz, ya’ni $n=k$ tartibli hosila uchun $y^{(k)}=u^{(k)}+v^{(k)}$ tenglik o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilamiz va $n=k+1$ uchun $y^{(k+1)}=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, yuqori tartibli hosilaning ta’rifi, hosilaga ega bo‘lgan funksiyalar xossalaridan foydalanib $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(u^{(k)}+v^{(k)})'= =(u^{(k)})'+(v^{(k)})'= u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini

topamiz.

Matematik induksiya prinsipiga ko‘ra $y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ tenglik ixtiyoriy natural n uchun o‘rinli deb xulosa chiqaramiz.

2-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini n-tartibli hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin: $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$.

Bu xossa ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlanadi. Isbotini o‘quvchilarga qoldiramiz.

Misol. $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun formula keltirib chiqaring.

Yechish. Berilgan kasr-ratsional funksiyaning maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz: $(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$. So‘ngra

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \qquad (6)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladigan A va B koeffitsientlarni izlaymiz. Bu koeffitsientlarni topish uchun tenglikning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ikki kasrning tenglik shartidan foydalanamiz. U holda $2x+3=A(x-3)+B(x-2)$, yoki

$$2x+3=(A+B)x+(-3A-2B)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Ikki ko‘phadning tenglik shartidan (ikki ko‘phad teng bo‘lishi uchun o‘zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsientlar teng bo‘lishi zarur va yyetarli) quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=3 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi A=-7, B=9 ekanligini ko‘rish qiyin emas. Topilgan natijalarni (1) tenglikka qo‘yamiz va yuqorida isbotlangan xossalardan foydalanib, berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasini kuyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)}=-7\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}+9\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} \qquad (7)$$

Endi $\frac{1}{x-2}$ va $\frac{1}{x-3}$ funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topishimiz lozim. Buning uchun $u=\frac{1}{x+a}$ funksiyaning n-tartibli hosilasini bilish yyetarli. Bu funksiyani $u=(x+a)^{-1}$ ko'rinishda yozib, ketma-ket hosilalarni hisoblaymiz. U holda

$u'=-(x+a)^{-2}$, $u''=2(x+a)^{-3}$, $u'''=-2\cdot 3(x+a)^{-3}=-6(x+a)^{-4}$.

Matematik induksiya metodi bilan

$$u^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x+a)^{-n-1} \qquad (8)$$

Shunday qilib, (8.7) va (8.8) tengliklardan foydalanib quyidagi

$$y^{(n)}=-7\cdot(-1)^n\cdot n!(x-2)^{-n-1}+9\cdot(-1)^n\cdot n!(x-3)^{-n-1}=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{9}{(x-3)^n}-\frac{7}{(x-2)^n}\right)$$

natijaga erishamiz.

2. Leybnits formulasi.

Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu ikki funksiya ko'paytmasining n -tartibli hosilasi uchun

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n{}'u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+$$
$$+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)} \qquad (9)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bunda $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Isboti. Matematik induksiya usulini qo'llaymiz. Ma'lumki,

$(uv)'=u'v+uv'$. Bu esa n=1 bo'lganda (9) formulaning to'g'riligini ko'rsatadi. Shuning uchun (9) formulani ixtiyoriy n uchun o'rinli deb olib, uning $n+1$ uchun ham to'g'riligini ko'rsatamiz. (9) ni differensiyalaymiz:

$$(uv)^{n+1}=u^{(n+1)}v+u^{(n)}v'+C'_n u^{(n)}v'+C_n{}'u^{(n-1)}v''+C_n^2u^{(n-1)}v''+C_n^2u^{(n-2)}v'''+$$
$$+\ldots+C_n^ku^{(n-k+1)}v^{(k)}+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k+1)}+\ldots+C_n^{n-1}u''v^{(n-1)}+C_n^{n-1}u'v^{(n)}+$$
$$+u'v^{(n)}+uv^{(n+1)} \qquad (10)$$

Ushbu

$$1+C_n{}'=1+n=C'_{n+1},\quad C_n{}'+C_n^2=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+1)n}{2}=C_{n+1}^2,$$

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n+2-k)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{(n+1)n\ldots(n+1-(k-1))}{k!}=C_{n+1}^k$$

tengliklardan foydalanib, (10) ni quyidagicha yozamiz:

$$(uv)^{n+1}=u^{(n+1)}v+C_{n+1}^1u^{(n)}v'+C_{n+1}^2u^{(n-1)}v''+\ldots+C_{n+1}^ku^{(n+1-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n+1)}$$

Demak, (9) formula $n+1$ uchun ham o‘rinli ekan. Isbot etilgan (9) formula *Leybnits formulasi* deb ataladi.

3. Leybnits formulasi tatbiqlari.

Misol. $y=x^3e^x$ ning 20-tartibli hosilasi topilsin.

Yechish. $u=e^x$ va $v=x^3$ deb olsak, Leybnits formulasiga ko‘ra

$$y^{(20)}=x^3(e^x)^{(20)}+C_{20}^1(x^3)'(e^x)^{(19)}+C_{20}^2(x^3)''(e^x)^{(18)}+C_{20}^3(x^3)'''(e^x)^{(17)}+$$

$+C_{20}^4(x^3)^{(4)}(e^x)^{16}+\ldots+(x^3)^{(20)}e^x$ bo‘ladi. $(x^3)'=3x^2$, $(x^3)''=6x$, $(x^3)'''=6$, $(x^3)^{(4)}=0$ tengliklarni va $y=x^3$ funksiyaning hamma keyingi hosilalarining 0 ga tengligini, shuningdek $\forall n$ uchun $(e^x)^{(n)}=e^x$ ekanligini e’tiborga olsak,

$y^{(20)}=e^x(x^3+3C_{20}^1x^2+6C_{20}^2x+6C_{20}^3)$ tenglik hosil bo‘ladi.

Endi koeffitsientlarni hisoblaymiz:

$$C_{20}^1=20,\quad C_{20}^2=\frac{20\cdot19}{2}=190,\quad C_{20}^3=\frac{20\cdot19\cdot18}{3!}=\frac{20\cdot19\cdot18}{6}=1140$$

Demak,

$$y^{(20)}=e^x(x^3+60x^2+1140x+6840).$$

Xulosa qilib aytganda, yuqori tartibli hosilalar funksiyalarning murakkab xatti-harakatlarini chuqurroq o‘rganish imkonini bunda esa ko’rib turganimizdek Leybnits formulasi va uning tatbiqlari yordam beradi. Ular matematik tahlilda, ayniqsa differensial tenglamalarni yechishda, muhim rol o‘ynaydi. Shuningdek, fizikadagi harakat qonunlarini, iqtisodiy modellardagi o‘zgarishlarni va texnik jarayonlardagi dinamikani aniqlashda keng qo‘llaniladi. Yuqori tartibli hosilalar yordamida funksiyalarning egri chiziqliligi, burilish nuqtalari va tebranish xossalari aniqlanadi. Bu esa nazariy bilimlarni amaliyotda qo‘llash imkoniyatini kengaytiradi. Mavzu matematik tahlil fanining asosiy qismlaridan biri bo‘lib, talabalarga chuqur matematik fikrlashni shakllantirishda katta yordam beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O‘zbekiston». 1 t: 2005,
2. Fixtengols G. M. „Kurs differensialnogo i integralnogo ischeleniya“ M.: 1970.
3. Sa’dullayev A. va boshqalar. Matematik analiz kursi misol va masalalar to`plami. T., «O‘zbekiston». 1-q. 1993., 2-q. 1995.
4. Demidovich B. P. “Sbornik zadach i uprajneni po matematicheskomu analizu” T.: 1972.
5. Ilin V. A., Poznyak E. G. “Maematik analiz asoslari” I qism, T.: 1981.