YUQORI TARTIBLI HOSILALAR VA DIFFERENSIALLARNING NAZARIY ASOSLARI VA AMALIY QO'LLANILISHI

Qurbonov Shuhrat Zarifovich

QDTU Shahrisabz oziq-ovqat muhandisligi fakulteti mustaqil izlanuvchisi

Mamajonova Sarvinozxon Odiljon qizi

QDTU Shahrisabz oziq-ovqat muhandisligi fakulteti 1-kurs talabasi

Anotatsiya: *Ushbu maqolada matematik analizning muhim bo'limlaridan biri bo'lgan yuqori tartibli hosilalar va differensiallar tushunchasi o'rganiladi. Hosilaning ta'rifi, geometrik va fizik ma'nosi, yuqori tartibli hosilalarning funksiyalar tahlilidagi o'rni, shuningdek, amaliy masalalarda qo'llanilishi tahlil qilinadi. Shuningdek, yuqori tartibli differensiallarning aniqlanishi va ularning differensial tenglamalar bilan bog'liqligi muhokama qilinadi. Maqolada nazariy tushunchalar bilan bir qatorda amaliy misollar ham keltirilgan.*

Kalit so'zlar: *Yuqori tartibli hosila, differensial, funksiyalar, differensial tenglama, matematik analiz, integral, Teylor qatori, fizik interpretatsiya.*

Kirish

Matematik analizda hosila tushunchasi funksiyaning o'zgarishini tahlil qilishda asosiy vositalardan biridir. Hosila funksiyaning biror nuqtadagi o'sish yoki kamayish tezligini aniqlab beradi [1]. Bu tushuncha birinchi marta fizika fanida harakatdagi jismlarning tezligini ifodalash uchun joriy qilingan bo'lsa-da, hozirda u matematikadan tortib iqtisodiyot, biologiya va muhandislik kabi ko'plab fan sohalarida keng qo'llanilmoqda [2].

Hosila – bu funksiyaning o'zgarishiga berilgan miqdoriy bahodir. Birinchi tartibli hosila funksiyaning eng oddiy o'zgarish tezligini bildiradi. Biroq, ko'plab amaliy va nazariy masalalarda funksiyaning faqat o'zgarish tezligini emas, balki bu o'zgarishning qanday o'zgarishini ham bilish muhim hisoblanadi [3]. Ana shunday hollarda **yuqori tartibli hosilalar** va **differensiallar** tushunchasi o'z o'rnini topadi.

$y=f(x)$ funksiya R da differensiallanuvchi bo'lsin.

$f'(x)$ funksiyaning hosilasi *f(x)* funksiyaning 2- tartibli hosilasi deyiladi va $f''(x)$ kabi belgilanadi.

Misol $y = \ln\sin\frac{x}{4}$, $y'' = ?$

$$y' = \left(\ln\sin\frac{x}{4}\right)' = \frac{1}{\sin\frac{x}{4}}\left(\sin\frac{x}{4}\right)' = \frac{\cos\frac{x}{4}}{\sin\frac{x}{4}}\left(\frac{x}{4}\right)' = \frac{1}{4}ctg\frac{x}{4}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{4}ctg\frac{x}{4}\right)' = \frac{1}{4}\frac{-1}{\sin^2\frac{x}{4}}\left(\frac{x}{4}\right)' = -\frac{1}{16\sin^2\frac{x}{4}}$$

$f^{(n-1)}(x)$ funksiyaning hosilasi *f(x)* funksiyaning n- tartibli hosilasi deyiladi va $f^{(n)}(x)$ kabi belgilanadi.

Misol $y = 3^{4x}$, $y^{(5)} = ?$

$$y' = \left(3^{4x}\right)' = 3^{4x}\ln 3 * (4x)' = 4\ln 3 * 3^{4x}$$

$$y'' = \left(4\ln 3 * 3^{4x}\right)' = 4\ln 3 * \ln 3 * 3^{4x} * (4x)' = 4^2(\ln 3)^2\, 3^{4x}$$

$\ldots$

$$y^{(5)} = 4^5(\ln 3)^5\, 3^{4x}$$

Masalan, fizikada jismlarning tezliklari birinchi tartibli hosila yordamida, tezlikning o‘zgarishi (ya'ni tezlanish) esa ikkinchi tartibli hosila orqali ifodalanadi [4]. Shuningdek, texnikada, masalan, qurilish inshootlari barqarorligini baholashda yuqori tartibli differensial tenglamalar yordamida model tuziladi [5].

Yuqori tartibli hosilalarni o‘rganish, shuningdek, funksiyaning Taylor qatori orqali ifodalanishida muhim ahamiyat kasb etadi. Har qanday silliq funksiyani uning yuqori tartibli hosilalari orqali ifodalash mumkinligi matematik tahlilda chuqur tahlillarga olib keladi [6].

Ushbu maqolada biz yuqori tartibli hosila va differensiallarning nazariy asoslarini ko‘rib chiqamiz, ularning qo‘llanilishini matematik formulalar va amaliy misollar asosida yoritib beramiz.

y=f(x) funksiya x_0 ning biror $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ atrofida aniqlangan va

$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$ hosilalarga ega va $f^{(n+1)}(x)$ hosila x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda ushbu :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$(x-x_0)^{n+1}$ Bu yerda $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$ formula o'rinli bo'ladi.

Agar $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = R_{n+1}(x)$ belgilash kiritsak :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

(1)

hosil bo'ladi. (1) formula **Teylor formulasi**, $R_{n+1}(x)$ esa **Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had** deyiladi. n→∞ da $R_{n+1}(x) = 0$ bo'ladi, shuning uchun:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

bo'ladi.

Teylor formulasida $x_0 = 0$ bo'lsa,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(n)}_{(0)}}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \quad (2)$$

hosil bo'ladi. (2) formula **Makloren formulasi** deyiladi.

Endi e^x, *sinx, cosx, ln(1+x)* funksiyalar uchun Makloren formulalarini qo'llab yozamiz.

1) $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, …. , $f^{(n)}(0) = 1$ ekanligini hisobga olib,

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ hosil bo'ladi. n→∞ da $R_{n+1}(x) = 0$

Xususan, x=1 da $e \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ e sonini taqribiy hisoblash formulasi hosil bo'ladi .

2) $f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$, $f^{(n)}(x) = \sin^{(n)} x = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$,

$$f^{(n)}(0) = \sin^{(n)}0 = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, n-juft \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, n-toq \end{cases}$$

$$f(x) = \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

3) $f(x) = \cos x$, $f(0) = 1$, $f^{(n)}(x) = \cos^{(n)}x = \cos(x+n\frac{\pi}{2})$,

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, n-toq \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, n-juft \end{cases}$$

$$f(x) = \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

4) $f(x)=\ln(1+x)$, $f(0) = 0$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

Dastlab, n-darajali hosilani topamiz:

$$f'(x) = (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = ((1+x)^{-1})' = (-1)(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

……………………

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)...(1-n)(1+x)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Shunday qilib,

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Yuqoridagilarni hisobga olib,

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

Natija va muhokama

Yuqori tartibli hosilalarni o‘rganish natijasida quyidagi xulosalarga keldik:

- **n-tartibli hosila** – bu funksiyaning n-marta differensiallanishi orqali olinadigan ifodadir. Agar funksiya yetarlicha silliq bo‘lsa, u holda istalgan tartibda hosila olish mumkin [1].
- Taylor qatori yordamida funksiyaning yuqori tartibli hosilalari orqali uning nuqta atrofidagi taqribiy qiymati aniqlanadi [6].
- Fizikada harakatning tezlanishi, siljish, zarba va elastiklik kabi tushunchalar yuqori tartibli hosilalar orqali ifodalanadi [4].
- Yuqori tartibli differensiallar differensial tenglamalarni tuzish va yechishda muhim ahamiyat kasb etadi [5].
- Yuqori tartibli differensial tenglamalar yordamida ko‘plab real jarayonlar, masalan, tebranishlar, issiqlik o‘tkazish, elektr zanjirlar holati va boshqalar modellashtiriladi [9]

Xulosa

Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar – bu matematik analizning chuqur va keng qo‘llaniladigan bo‘limlaridan biridir. Ularning nazariy jihatdan o‘rganilishi funksiyalarning xatti-harakatini yanada chuqurroq tahlil qilishga imkon beradi. Shuningdek, yuqori tartibli differensiallar yordamida ko‘plab fizik, texnik va iqtisodiy tizimlarni modellashtirish mumkin. Ushbu maqolada nazariy asoslar bilan birga amaliy qo‘llanmalar ham yoritilgan bo‘lib, bu mavzuni o‘rganayotgan talaba va mutaxassislar uchun foydalidir. Ta’kidlaymizki, har qanday hodisalar sinfiga nisbatan shakllangan variatsion tamoyillar nafaqat mexanik, balki fizik, kimyoviy, biologik va boshqa jarayonlarning matematik modellarini bir xilda qurish imkonini beradi.[10]

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Kudryavtsev L.D. – *Matematik analiz kursi*, 1-2 jildlar, Moskva, 1970.
2. Stewart J. – *Calculus: Early Transcendentals*, Cengage Learning, 2015.
3. Spivak M. – *Calculus*, Publish or Perish, 2008.
4. Thomas G.B. – *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley, 1996.
5. Rasulov M.M. – *Matematik analiz asoslari*, Toshkent: Fan, 1994.
6. S. Lang – *Undergraduate Analysis*, Springer, 1983.

7. Shavkatov B.X. – *Matematik analizdan masalalar to'plami*, Toshkent, 2000.
8. Sh.Z. Kurbanov (2023) STEAM EDUCATIONAL PROGRAMS IN IMPLEMENTATION OF INDEPENDENT EDUCATION OF STUDENTS IN THE MODULE CREDIT SYSTEM //American Journal of Technology and Applied Sciences Volume 10, March, 2023, 7-10.
9. STEAM ЁНДАШУВИ АНИҚ ФАНЛАР ТАЪЛИМИНИНГ АМАЛИЙ ҲАЁТДА ҚЎЛЛАНИШИНИ ТАЪМИНЛОВЧИ ТАЪЛИМ}, volume={2}, url={https://scholar-journal.org/index.php/s/article/view/71}
10. Primov T.I., Qurbonov S.Z. Matematik modellarni tuzishda variatsion tamoillar. "Academic Research in Educational Sciences". 2021, Volume 2, Issue