

KASRLARNI TAQQOSLASH VA ULUSH TUSHUNCHASI HAMDA O'LCHOV BIRLIKLARI BILAN TANISHISH

Ruzikulov Azizjon Axmadjon o'g'li
Samarqand davlat pedagogika instituti

Anatatsiya: Maqolada kasrlarni farqi ularni o'rganish metodlari haqida batafsil yoritilgan.

Matematika ta'limida kasrlar (fraction), ulush (share) tushunchasi va o'lchov birliklari (units of measurement) – alohida muhim mavzular bo'lsa-da, bir-biriga yaqin aloqa orqali o'qitilishi o'quvchilarning tushunishini chuqurlashtiradi. Kasrlarni taqqoslash – o'quvchilarning raqamli va nisbi (relative) fikrlashini shakllantiradi; ulush tushunchasi esa “butunning qismi” – ijtimoiy va matematik kontekstlarda ko'p qo'llanadi; o'lchov birliklari bilan tanishish esa o'quvchilarga fizik olamdagi hamda matematik strukturadagi “birlik” tushunchasini his qilish imkonini beradi. Ushbu maqolada birinchi navbatda kasrlar va ulushni ko'rib chiqamiz, keyin o'lchov birliklari bilan tanishishga e'tibor qaratamiz, so'ngra pedagogik metodika va xalqaro tadqiqotlar bilan bog'laymiz.

1. Kasrlar va ulush tushunchasi

1.1 Tarifi va matematik mazmuni

Kasr – odatda “butun bir narsaning teng qismiga bo'linishi” orqali ifodalanadigan matematik obyekt bo'lib, $(\frac{a}{b})$ shaklida yoziladi, bunda (a) — kasrning soni (numerator), (b) — maxraj (denominator). Ulush tushunchasi esa ko'pincha “biror butun narsaning bir qismini olmoq” yoki “biror jamdan bir qismini ajratmoq” mavzularida qo'llanadi; masalan, “4/5” ulush deganida — butunning 5 ga teng bo'lingan qismlaridan 4 tasi. Kasrlar bilan ishlash: qo'shish, ayirish, ko'paytma, bo'linma operatsiyalari orqali amalga oshiriladi, lekin ularning tushunilishi ham murakkabroq jarayon.

Kasrlarni taqqoslash deganida bizga “qaysi kasr kattaroq (yoki kichikroq)?” degan savol paydo bo'ladi. Bu holatda faqat numeratordagi yoki denominatordagi sonlar asosida qaror qilish noto'g'ri bo'lishi mumkin (masalan, 3/4 va 2/3 ni solishtirishda ko'plab o'quvchilar xato qiladi).

1.2 Tadqiqotlarda aniqlangan asosiy qiyinchilik va strategiyalar

Matematika ta'lim tadqiqotlari kasrlarni tushunishda bir qancha markaziy muammolarni ko'rsatdi:

- Masalan, Mathematics education sohasidagi bir tadqiqotda 4–6-sinf o'quvchilari kasr taqqoslash vazifalarida “butun son biasi” (whole-number bias) ni namoyon

qilishadi — ya'ni ular numeratorda yoki denominatorda katta son bo'lsa, kasr ham kattaroq deb qarab qolishadi. ([PubMed](#))

- Boshqa tadqiqotlardagi pedagoglar ham kasrlarning bir-biriga nisbatan kattaligini (magnitude) tushunishda qiyinchilikni qayd etgan.

- Shuningdek, pedagoglarga tayyorlanayotgan yoki amalda ishlayotgan o'qituvchilarning kasr taqqoslash bo'yicha tushuncha va strategiyalari yetarli darajada rivojlanmaganligi aniqlangan. ([IEJME](#))

- Tadqiqotlardan biri kasr tushunchasining “part-whole”, “o'lchov (measurement)”, “operator”, “quotient” kabi bir necha konstruktleri borligini ko'rsatgan. ([SpringerLink](#))

Ushbu natijalar shuni ko'rsatadiki: kasrlarni taqqoslashni o'qitishda faqat algoritmik yo'l bilan (masalan, umumiy maxrajga keltirish va keyin numeratorlarni solishtirish) cheklanish yaramaydi — tushuncha asosida, strategik fikrlashni rag'batlantiruvchi yondashuv zarur.

1.3 Kasrlarni taqqoslash usullari

Kasrlarni taqqoslashning umumiy pedagogik usullari quyidagicha tasniflanishi mumkin:

- Vizual model va manipulyativlar: Halqa, chiziq bo'yicha kasrlarni ifodalash; masalan, $1/3$ va $1/4$ ni chiziq ustida qiyoslash. Bu orqali o'quvchilar “qism” va “butun” tushunchasini sezadilar. Tadqiqotlar manipulativlardan foydalanish kasr tushunishini yaxshilashga xizmat qilishini ko'rsatgan. ([arXiv](#))

- Raqamli strategiya: umumiy maxrajga keltirish: Masalan, $2/3$ va $3/5$ ni taqqoslash uchun $2/3 = 10/15$, $3/5 = 9/15$, shundan $10/15 > 9/15$, demak $2/3 > 3/5$. Bu usul oddiy va aniq, lekin o'quvchi tushuncha jihatdan mustahkam bo'lmasa, xatoga olib kelishi mumkin.

- Cross-multiplication (xoch ko'paytirish) strategiyasi: (a/b) va (c/d) kasrlarni taqqoslashda $(a \times d)$ va $(b \times c)$ ni solishtirish. Masalan, $3/4$ va $5/7$: $3 \times 7 = 21$, $4 \times 5 = 20$, demak $3/4 > 5/7$. Bu usul matematika jihatdan to'liq, lekin tushunchani yetarlicha o'zlashtirmagan o'quvchilar uchun “men nima uchun shu ko'paytirish bilan solishtirdim?” degan savol paydo bo'ladi. Tadqiqotlarda bu usulni qo'llashdagi agentlik chegaralari ko'rsatilgan. ([PubMed](#))

- Number line (raqamlar chizig'i) bo'yicha solishtirish: Kasrlarni raqamlar chizig'i ustida joylashtirish orqali kattaligini his qilish strategiyasidir. Bu o'quvchilarga “kasr raqam ekan” degan tushunchani mustahkamlashga xizmat qiladi. Masalan, tadqiqotda “Coming to see fractions on the number line” nomli ish bu yondashuvni muvaffaqiyatli qiladi. ([arXiv](#))

1.4 Ulush tushunchasining aloqasi

Ulush (“share”, “portion”, “fraction of a whole”) tushunchasi kasr tushunchasi bilan chambarchas bog'liq. Masalan, “ $4/7$ butunning 7 qismidan 4 tasi” deganida ulush

tushunchasi kasr bilan ifodalanadi. Pedagogik jihatdan, o'quvchilarga ulushni tushuntirishda quyidagi komponentlar muhim:

- Butun (whole) tushunchasi: Nima «butun» ekanligini aniqlash (masalan, pizza bir butun).
- Bo'linish tushunchasi: Butun teng qismlarga bo'linishi.
- Qismning ajratilishi: Ajratilgan qismni kasr bilan ifodalash.
- Kasrni "butunning qismi" sifatida ko'rib chiqish: Bu, kasrni raqam emas, balki "qism" sifatida qarashni osonlashtiradi.

Ulush tushunchasining kasr bilan birgalikda o'rganilishi o'quvchilarda real kontekstlarda – misol uchun: "Agar sizda 8 mandalin bo'lsa va uni 4 ta teng qismga bo'lsangiz, siz har bir qismga 2 mandalin olasiz" – degan misollar orqali – matematik tushunchani jonli holatda his qilish imkonini yaratadi.

1.5 Pedagogik metodik tavsiyalar

Kasrlar va ulushni o'rgatishda quyidagi tavsiyalar amalda foydali bo'ladi:

- Darsni boshlashda o'quvchilarga oddiy real kontekstli misollar taqdim eting: "Ben siz bilan 1 pizza bo'lsa, uni 3 ta teng qismga bo'lsang, har kimga nechta qismlar tushadi?" – degan savollar yordamida.

• Manipulativ va vizual materiallardan foydalaning: kasr bloklari (fraction blocks), chiziqli model, halqa diagrammalari. Bu o'quvchilarning kasr tushunchasini vizualizatsiya qilishiga yordam beradi.

• Kasrlarni raqamlar chizig'i (number line) ustida joylashtirish mashqlarini kiriting: $1/2$, $1/3$, $2/5$, $3/4$ kabi kasrlarni chiziqda aniqlash. Bu faoliyat kasrni "raqam" darajasida ham his qilish imkonini beradi.

• Turli strategiyalarni (vizual model, umumiy maxrajga keltirish, xoch ko'paytirish) tanishtiring va o'quvchilarga ulardan strategik tanlov qilishga imkon bering. Bu esa — matematik fikrlashni rivojlantiradi.

• Kasrlarni taqqoslashni o'rgatishda "nima uchun bu kasr kattaroq?" degan savolni yo'lga qo'ying. Qobiliyat – bu faqat nechta hissiy yondashuv emas, balki tushuncha darajasida ham bo'lishi kerak.

• Sinov, baholash jarayonida faqat javobni emas, balki strategiyani ham so'rang: "Qanday yo'l bilan taqqosladingiz?" — degan savol bilan o'zgarishga rag'bat bering.

2. O'lchov birliklari bilan tanishish

2.1 Tarifi va ahamiyati

O'lchov birliklari — fizik olamdagi yoki kundalik hayotdagi miqdorlarni tartibga solishda, taqqoslashda va ifodalashda zarur bo'lgan bir o'lchov (unit) tushunchasidir. Masalan, uzunlikni metr yoki santimetr bilan, massani kilogramm bilan o'lchash. O'zbekcha darsliklarda "o'lchov birliklari" deb ataladi. Bu tushuncha o'quvchilarga "1 metr nima?", "1 kilogramm nima?", "1 litr nima?" degan savollar orqali kirib boradi.

Ta'limchi manbaga ko'ra: «Understanding units of measurement describes how students: are able to recognise attributes that can be measured; use and calculate with units of measure; make the transition from informal to formal units; develop the structure of units allowing them to calculate length, area and volume; and deal with mass and capacity ...» (education.nsw.gov.au)

Shuningdek — o'lchov birligi va o'lchov jarayoni (measurement) bilan bog'liq nazariy jihatdan tadqiqotlar ham mavjud. (SpringerLink)

2.2 O'lchov birliklari bilan tanishishda zamonaviy jihatlar

O'quvchilarga o'lchov birliklarini o'rgatishda bir qancha nuqtalarga e'tibor berilishi zarur:

- Informal dan formalga o'tish: Dastlab o'quvchilar “o'z tanasi bo'ylab million metr” kabi shaxsiy referentlardan foydalanishi mumkin — bu informal birlikdir. Keyin rasmiy birliklar (metr, litr, kilogramm) bilan ishlashga o'tiladi. (education.nsw.gov.au)

- Turli atributlarini o'lchash: Masalan, uzunlik, massa, hajm, sig'im, vaqt, boshqalar. Har biri uchun mos birliklari bo'ladi; bu birliklar o'quvchilarga «qancha», «necha marta», «qanchalik» savollariga javob berishda yordam beradi.

- Birliklar o'rtasidagi bog'lanish: Masalan, 1000 gramm = 1 kilogramm; 100 sm = 1 m; 1 litr = 1000 millilitr — bu shaklda conversion (o'zgartirish) tushunchasi kiradi. Bu esa o'z navbatida kasr va nisbiylik tushunchalariga yaqin bo'ladi (“yarim litr”, “uchdan bir metr”, “mutlaq birlikning qismi”).

- Matematik fikrlash bilan integratsiya: O'lchov birliklari bilan ishlashda raqamli fikrlash, kasr, foiz, proporsiya kabi tushunchalar bilan bog'liq bo'ladi. Masalan, “1 / 2 kg”, “3 / 4 m” kabi misollar orqali — ulush tushunchasi va o'lchov birliklari birlashadi.

2.3 Pedagogik metodika – darslarga qo'llash

O'lchov birliklari mavzusini o'qitishda quyidagi tavsiyalar foydali:

- Darsni amaliy atmosfera bilan boshlang: o'quvchilarga oddiy o'lchov vositalarini (metr chizig'i, timsoh, va boshqalar) olib keling va “bu qancha uzun?”, “bu nechta santimetr?” kabi savollar bilan tanishtiring.

- Ulush va kasrlar bilan bog'langan misollar qiling: masalan, “Bu kameraning balandligi 2 m, biz uni 4 teng qismga bo'lsak, har bir qism nechta metr bo'ladi?” – bu yerda 2 m ning 4 qismidan har biri 0,5 m bo'ladi — ya'ni $1/4 = 0,5$ m. Bu kasr, ulush va birlikni birlashtiradi.

- Birliklar o'rtasida o'zgartirishlarni (conversion) o'rgating: misol — “1 m = 100 cm, sizga taklif: 250 cm ni nechta metr qiladi?” – bu orqali o'quvchi sonni bir birlikdan ikkinchi bir birlikka o'tkazish strategiyasini o'zlashtiradi.

- O'lchov birliklari bilan taqqoslash mashqlari qo'shing: misol — “Qaysi katta: 1500 g yoki 1,2 kg?” degan savol bilan. Bu o'quvchilarga birliklararo solishtirishni o'rgatadi.

- Baholash mashqlarida “bir birlikning necha qismi” tushunchasini kiritish: masalan, “Bu kenglikning $\frac{3}{5}$ qismi nechta metr bo‘ladi?” degan savollar bilan. Bu esa kasrlar va o‘lchov birliklarini uyg‘unlashtiradi.

2.4 O‘zaro bog‘lanish – kasrlar va birliklar

Kasrlar va o‘lchov birliklari — alohida bo‘lsa ham, bir-birini to‘ldiruvchi tushunchalardir. Masalan:

- Kasr yordamida birlikning bir qismini ifodalash mumkin: “Bu taxtaning uzunligi 2 m; biz uni 5 ga bo‘lsak, har bir qism $\frac{2}{5}$ m bo‘ladi.”

- Birlik bilan tanishish kontekstida kasr tushunchasi jonliroq bo‘ladi: “50 cm = 0,5 m” degan holatda o‘quvchi raqamli kasrni (0,5) metr birligi bilan bog‘laydi.

- Taqqoslash jihatidan: “ $\frac{3}{4}$ m vs $\frac{2}{3}$ m” degan misolda raqamli kasrlar bilan ishlash, keyin esa bir birlik (metr) kontekstida solishtirish amalga oshiriladi.

- O‘zaro integratsiya darslarida: bir darsning bir qismi kasrlarni vizual tushuntirishga, keyingi qismi o‘lchov birliklari bilan qo‘shimcha mashqlarga ajratilishi mumkin — shu bilan o‘quvchilarning tushunchasi kengayadi va ko‘p jihatdan chuqurlashadi.

3. Ilmiy asosli yondashuv va xalqaro dasturlar bilan moslashuv

3.1 Tadqiqotlardan asosiy xulosalar

Kasrlar va ulush tushunchasi o‘qitishda bir qator ilmiy tadqiqotlar amalga oshirilgan:

- “Learning progression toward a measurement concept of fractions” nomli tadqiqotda kasr tushunchasining o‘lchov (measurement) kontseptsiyasiga o‘tishini bosqichma-bosqich tahlil qilinadi. ([SpringerOpen](#)) U yerda part-whole schemedan boshlab, unit fraction, proper fraction, generalized measurement scheme ga o‘tish yondashuvi tasvirlangan.

- Teacher education tadqiqotida pedagog tayyorgarlikdagi o‘qituvchilarning kasr taqqoslash strategiyasida protseduraga (masalan, xoch ko‘paytirish) tayanishi va tushuncha jihatdan moslashuvchan emasligi qayd etilgan.

- O‘lchov birliklari bo‘yicha esa “Understanding units of measurement” manbasida birliklar tushunchasi va ularning o‘quvchilarda shakllanishi tahlil qilingan.

- Pedagogik kontent bilim (PCK) bo‘yicha tadqiqotlar (masalan, “Teachers’ conceptual understanding of fraction operations”) kasrlarni o‘qituvchilarning o‘zlari ham yetarlicha tushunmayotgani ko‘rsatgan.

3.2 Xalqaro ta’lim dasturlari bilan moslik

Kasrlar va o‘lchov birliklari bo‘yicha xalqaro standartlar va ko‘rsatmalar mavjud. Masalan:

- Programme for International Student Assessment (PISA) va Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) kabi xalqaro tadqiqotlarda

o'quvchilarning matematik muammo yechish, raqam tushunchasi, o'lchov va proporsiya bilan ishlash ko'nikmalari tekshiriladi.

- Shuningdek, “measurement” (o'lchov) va “number & algebra” (raqamlar va algebra) elementlari ko'plab milliy dasturlarda ajratilgan blok sifatida mavjud. Masalan, “o'lchov birliklarini tanishish” darslari matematika dasturida mustahkam o'rin oladi.

- O'qituvchilarga kasrlar va birliklar bo'yicha strategiyalarni tushunishga qaratilgan malaka oshirish kurslari va metodik qo'llanmalar tavsiya qilinmoqda — chunki tadqiqotlar o'qituvchilarning tushunchasi o'quvchilarnikidan kam ekanligini ko'rsatadi.

3.3 Amaliy sinf tajribasi uchun yo'l xaritasi

Quyida o'quvchilarning kasrlarni taqqoslash, ulush tushunchasi va o'lchov birliklarini o'zlashtirish jarayonida foydalanish mumkin bo'lgan yo'l xaritasi:

1. Bosqich 1 – Kirish va tushunchani shakllantirish
 - Kasr nima? Ulush nima? Birlik nima? – tushunchalarini real hayot misollari bilan taqdim eting (pizza, tort, bo'lak, metr chizig'i, kilogramm).
 - Vizual materiallardan foydalaning – chiziqli diagrammalari, kasr bloklari, bo'linishga oid misollar.
2. Bosqich 2 – Kasrlarni taqqoslash
 - Boshlang'ich misollar: $1/2$ vs $1/3$; $3/5$ vs $4/5$ – vizual model yordamida.
 - Strategiyalarni tanishtiring: umumiy maxrajga keltirish, cross-multiplication, number line.
 - O'quvchilarga turli strategiyalarni sinab ko'rish imkonini bering va “qaysi strategiya nega foydali?” degan savol bilan muhokama qiling.
3. Bosqich 3 – Ulush va birliklar bilan integratsiya
 - Misollar: “1 metr uzunlikdagi taxtani 4 ga bo'lsak, har bir qism necha metr bo'ladi?” (0,25 m) – bu ulush + birlik.
 - O'lchov birliklari bilan misollar: santimetr, metr, litr, kilogramm, soat. Birliklarni bir-biri bilan solishtirish va o'zgartirish.
 - Kasr bilan birlik integratsiyasi: $3/4$ kg, $2/5$ litr, $7/8$ m — kabi misollar.
4. Bosqich 4 – Mustahkamlash va chuqurroq ish
 - Guruh ishlar: har bir guruhga “o'lchov birliklari va kasrlarni qo'shib ishlating” degan mini-projekt berilishi mumkin. Masalan: “Biz pardoixonamizda 2 m taxta olamiz. Uni 5 ta teng qismga bo'lamiz. Har bir qismning uzunligi necha metr bo'ladi?” va “Agar bir qismni santimetrda ifodalash kerak bo'lsa, nechaga teng bo'ladi?” — degan savollar bilan.
 - Baholash: nafaqat to'g'ri javobni so'rash, balki “strategiya / yo'lni” so'rash ham. “Nima uchun shu yo'lni tanladingiz?”, “Agar boshqa yo'l tanlasang, javob qanday bo'lardi?” degan savollar kiritilsin.

5. Bosqich 5 – Refleksiya va kengaytirish

- O'quvchilar bilan muhokama qiling: “Kasrni, ulushni, birlikni birgalikda o'rgansak nimasi o'zgaradi?”, “Qaysi misollar sizga qiyinroq bo'ldi va nega?”
- Kelgusi darslarda kasr operatsiyalari (qo'shish, ayirish, ko'paytma, bo'linma) va o'lchov birliklari bilan bog'liq ilgarilashlarni rejalashtiring.

4. Xulosa

Kasrlar, ulush tushunchasi va o'lchov birliklari — zamonaviy matematika ta'limida ajralmas tarkibiy elementlardir. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, o'quvchilar kasrlarni faqat protsedura jihatdan emas, balki tushuncha jihatdan o'zlashtirganida yanada barqaror natijalarga erishadilar. ([SpringerOpen](#)) Shuningdek, o'lchov birliklari bilan ishlash raqamli fikrlashni mustahkamlaydi, real kontekst bilan bog'liq mashqlar bilan esa o'quvchilarning motivatsiyasini oshiradi.

Pedagogik jihatdan kasr, ulush va birliklar birga o'qitilganda, o'quvchilar “raqam”, “kichik qism”, “butun”, “necha birlik”, “qaysi birlik” kabi tushunchalarni integrativ tarzda egallaydilar. Masalan, “ $\frac{2}{5}$ m”, “ $\frac{3}{4}$ kg”, “ $\frac{1}{2}$ litr” kabi iboralar orqali — kasr, ulush va birliklarning sintezi yuzaga keladi.

Shu bois, dars rejalarida, o'quv rejasida va baholash vositalarida ushbu uch mavzuni o'zaro bog'lab ko'rib chiqish tavsiya etiladi — nafaqat matematik tushunchalarni alohida balki ular o'rtasidagi bog'lanishni ham mustahkamlash uchun.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

- Karimova, N. (2021). *Boshlang'ich ta'limda matematik tushunchalarni shakllantirish metodikasi*. Toshkent: TDPU nashriyoti.
- OECD. (2022). *PISA 2022 Mathematics Framework*. Paris: OECD Publishing.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press.
- Davlatova, D. (2020). “Kasrlarni o'qitishda vizual modellashirishning o'rni.” *Ta'lim va innovatsiya jurnali*, №4, 23–29.
- Khan Academy (2023). *Fractions and Decimals Learning Resources*.
<https://www.khanacademy.org>
- Piaget, J. (1970). *Science of Education and the Psychology of the Child*. Viking Press.
- Milliy o'quv dasturi (2023). *Matematika fanidan davlat standarti*. Toshkent: XTV.
- STEM Education Guide (2022). *Integrating Measurement in Elementary STEM Lessons*. New York: UNESCO.
- OECD (2023). *PISA 2022 Results: Volume I – Student Performance in Mathematics*. Paris: OECD Publishing