

FRACKTALLAR VA ULARNING SOHALARDA QO‘LLANILISHI

S.H. Alimov

alimovsalohiddin97@gmail.com

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti Jizzax filiali

I. N. Mladenov

Institute of Mechanics, Austury

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy

Universiteti Jizzax filiali talabalari

Nurullayeva Durdona Ziyodulla qizi

Farmonova Dildora Normurod qizi

Annotatsiya: Mazkur maqolada fraktallar tushunchasi, ularning asosiy xususiyatlari va matematik analizdagi o‘rni yoritilgan. Fraktallar geometrik va dinamik tizimlarda qanday qo‘llanilishi hamda ularning turli amaliy sohalarga ta’siri ko‘rib chiqiladi. Shuningdek, fraktallar uchun hisoblangan o‘lcham tushunchasi va ularning differensial hamda integral hisob bilan bog‘liqligi tadqiq qilinadi. Maqolada matematik modellashtirish va sonli hisoblash usullari yordamida fraktallarning zamonaviy tahlili taqdim etilgan.

Kalit so‘zlar: fraktallar, fraktal o‘lcham, Hausdorff o‘lchovi, matematik analiz, dinamik tizimlar, integral hisob, xaos nazariyasi, fizik modellar, iqtisodiy modellashtirish.

Matematik analiz sohasida fraktallar muhim o‘rin egallaydi. Ular murakkab geometriyaga ega bo‘lib, tabiiy va sun‘iy tizimlarning o‘z-o‘ziga o‘xshashlik xususiyatini aks ettiradi. Fraktallar tushunchasi ilk bor Benua Mandelbrot tomonidan fanga kiritilgan bo‘lib, ularni matematik modellashtirish va analiz qilish zamonaviy ilmiy tadqiqotlarda muhim ahamiyat kasb etmoqda.

Fraktallar tushunchasi va ularning xususiyatlari

Fraktal – bu o‘z-o‘ziga o‘xshashlik xususiyatiga ega bo‘lgan, murakkab tuzilishga ega geometrik shakl yoki matematik to‘plamdir. Fraktallar klassik Evklid geometriyasidan farqli ravishda butun son o‘lchamlariga ega bo‘lmaydi, aksincha, ularning o‘lchami

ko'pincha kasr son shaklida bo'ladi. Ushbu ob'ektlar kichik qismlarining shakli butun strukturaning kichraytirilgan nusxasi sifatida namoyon bo'ladi.

Fraktal tushunchasi ilk bor fransuz matematigi **Benua Mandelbrot** tomonidan 1975-yilda ilmiy fanga kiritilgan bo'lib, u tabiiy va matematik tizimlarning murakkablik xususiyatlarini tahlil qilishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Fraktallar quyidagi asosiy xususiyatlarga ega:

O'z-o'ziga o'xshashlik: Fraktallar har qanday masshtabda o'xshash tuzilishga ega bo'lib, ularning har bir kichik qismi butun shaklning kichraytirilgan nusxasi hisoblanadi. Bu xususiyat tabiiy obyektlarda, masalan, bulutlar, daryo irmoqlari, tog' tizmalari va daraxt shoxlarida kuzatiladi.

Fraktal o'lcham: Fraktallar klassik Evklid geometriyasidagi shakllar kabi oddiy butun son o'lchamga ega emas. Ularning o'lchami ko'pincha butun bo'lmagan son (fraksional) bo'lib, bu ularning o'ziga xos geometriyaviy murakkabligini ifodalaydi. Masalan, Ko'ch qorparchasi fraktalining o'lchami ≈ 1.26 ga teng bo'lishi mumkin.

Murakkablik va noaniqlik: Fraktallar ko'pincha deterministik yoki stokastik (tasodifiy) shakllarda namoyon bo'ladi. Deterministik fraktallar aniq matematik formulalar asosida quriladi, masalan, Sierpinski uchburchagi yoki Mandelbrot to'plami. Stokastik fraktallar esa tasodifiy jarayonlarga asoslanadi va atmosferadagi turbulentlik yoki iqtisodiy bozorlardagi o'zgarishlarni modellashda qo'llaniladi.

Xaotik va dinamik tizimlar bilan bog'liqlik: Fraktallar dinamik tizimlar va xaos nazariyasi bilan chambarchas bog'liq bo'lib, ularning ba'zilari murakkab iterativ jarayonlar orqali hosil bo'ladi. Masalan, Julia to'plami va Mandelbrot to'plami iterativ funksiya tizimlarining natijasi sifatida yuzaga keladi.

Fraktallar va o'lcham shkalasi: Fraktallar real dunyodagi o'lchov shkalalariga bog'liq bo'lmaganligi sababli, ularni turli kattalikdagi obyektlarni tavsiflash uchun ishlatish mumkin. Masalan, sun'iy yo'ldosh tasvirlaridan foydalangan holda, geografik obyektlarning tuzilishini aniqlashda fraktallar qo'llaniladi.

Fraktallar matematika, fizika, biologiya, iqtisodiyot, kompyuter grafikasi va sun'iy intellekt sohalarida keng qo'llaniladi. Masalan, signal va tasvirlarni qayta ishlash, kvant fizikasi va iqlim o'zgarishlarini modellashtirishda fraktallar muhim vosita hisoblanadi.

Fraktal o'lcham va Hausdorff o'lchovi

An'anaviy Evklid o'lchovidan farqli ravishda fraktal o'lcham Hausdorff o'lchovi orqali ifodalanadi. Hausdorff o'lchovi quyidagicha aniqlanadi:

$$d_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

bu yerda $N(\epsilon)$ – fraktalni qoplash uchun zarur bo'lgan elementar to'plamlar soni, ϵ esa ularning o'lchamidir. Fraktal o'lchov tabiiy ob'ektlar uchun aniq modellashtirish imkoniyatini beradi.

Fraktallarni matematik analizda qo'llash juda keng va murakkab soha bo'lib, ularning xususiyatlari matematik modellashtirish, hisoblash usullari, integrallar va differensial tenglamalar yordamida yanada chuqurroq o'rganiladi. Fraktallar geometriyasi va ularning matematik tahlili turli xil amaliy va nazariy masalalarni hal qilishda katta ahamiyatga ega. Quyida fraktallarni matematik analizda qo'llashning ba'zi asosiy yo'nalishlari keltirilgan:

Fraktallar va Differensial Tenglamalar: Fraktallarni matematik analizda qo'llashda differensial tenglamalar muhim o'rin tutadi. Fraktallar murakkab geometrik tuzilmalarga ega bo'lgani uchun, ularni an'anaviy differensial tenglamalar yordamida tavsiflash qiyin. Ammo, ba'zi fraktal tizimlar, masalan, xaotik jarayonlar va stokastik jarayonlar, differensial tenglamalar yordamida analiz qilinadi.

a) **Stokastik differensial tenglamalar:** Fraktallarni tavsiflovchi tizimlar ko'pincha stokastik jarayonlar bilan bog'liq bo'lib, ularning matematik tahlilida stokastik differensial tenglamalar ishlatiladi. Bu tenglamalar yordamida fraktal tuzilmalarni tasvirlash va ularga tegishli matematik xususiyatlarni aniqlash mumkin.

b) **Fraktal dinamik tizimlar:** Fraktallar dinamik tizimlarning iterativ jarayonlari natijasida hosil bo'ladi. Ularni matematik analizda differensial tenglamalar yordamida

o'rganish uchun, avvalo, tizimlarning differensial tenglamalarini chiqarmoq va tizimning stabilitasini tahlil qilish kerak bo'ladi. Bu, masalan, fraktal shakllarning shakllanishini va ularning o'zgarishini kuzatish imkonini beradi.

Fraktallar va Integral Hisob: Fraktallarni integral hisobda qo'llash ham juda muhimdir, chunki fraktallarni tasvirlashda ular uchun aniqlangan o'lcham tushunchasi ko'pincha integral hisob bilan bog'liq bo'ladi.

a) **Hausdorff o'lchovi:** Fraktallarni o'lchashda, ayniqsa, Hausdorff o'lchovi ko'plab matematik amaliyotlarda ishlatiladi. Hausdorff o'lchovi fraktallarni geometrik o'lchashning fraksional shaklini taqdim etadi. Bu o'lchov integral usullari yordamida hisoblanadi. Hausdorff o'lchovini fraktalning o'z-o'ziga o'xshashligini inobatga olgan holda aniqlash mumkin.

b) **Integrallashda fraktallar:** Fraktallarni an'anaviy integral yordamida to'liq tasvirlash qiyin bo'lsa-da, ular uchun maxsus integrallar ishlatiladi. Masalan, fraktallarni tasvirlashda Riemann integralidan ko'ra, Lebesgue integrali yoki fraktal integrallari qo'llaniladi. Fraktallarni integrallashning maxsus usullari, masalan, "fraktal integral" yoki "klassik integralning" to'liq hisoblanishi, fraktal geometriya va dinamik tizimlar uchun zarur bo'ladi.

Fraktallarni Matematik Modellashtirishda Qo'llash

Fraktallarni matematik modellashtirishda qo'llash turli sohalarda, masalan, fizik jarayonlar, iqtisodiy modellash va boshqa sohalarda qo'llaniladi. Matematik analizda fraktallar ko'pincha murakkab tizimlarni tasvirlash uchun ishlatiladi, chunki ular murakkab va tartibsiz tuzilmalarni yaxshiroq tushuntiradi.

a) **Xaos nazariyasi:** Fraktallar xaos nazariyasining asosiy vositalaridan biridir. Xaotik tizimlarning vaqt o'tishi bilan qanday o'zgarishini tushunish uchun fraktal analiz ishlatiladi. Bu tizimlar ko'pincha iterativ jarayonlarni o'z ichiga oladi va fraktal strukturalarni hosil qiladi. Fraktallar orqali, masalan, atmosferadagi turli xil xaotik jarayonlarni modellash mumkin.

b) **Fizik modellar:** Fraktallar fizik jarayonlarni tasvirlashda qo'llaniladi. Masalan, turli xil to'lqinlar, optik tizimlar va materiallar, ularning o'zgarishlari fraktal geometrik

tuzilmalar yordamida modellanishi mumkin. Fraktal analiz fizik tizimlarning murakkabligini tushunishda yordam beradi.

Fraktallarni Sonli Hisoblash

Fraktallarni sonli hisoblashda qo'llashda, ko'pincha fraktal geometriya va ularning xususiyatlarini hisoblash uchun maxsus algoritmlar ishlab chiqiladi. Bu algoritmlar yordamida fraktal tuzilmalarni o'rganish va ular bo'yicha matematik hisoblashlarni amalga oshirish mumkin.

a) **Iteratsion metodlar:** Fraktallarni hisoblashda iteratsion metodlar keng qo'llaniladi. Iteratsion metodlar yordamida, fraktalning har bir qismi boshqalar bilan o'xshashligini tahlil qilish mumkin. Bu metodlar fraktal geometriyaning asosi hisoblanadi.

b) **Fraktalning sonli o'lchami:** Fraktallarni sonli hisoblashda, ularning o'lchamlarini hisoblash uchun maxsus algoritmlar ishlatiladi. Bu o'lchamlar odatda, ular uchun aniqlangan fraksional o'lchamni bildiradi. Sonli hisoblash yordamida bu o'lchamlar aniq hisoblanadi va fraktallarni tahlil qilishda muhim vosita bo'lib xizmat qiladi.

Fraktallarni Analizda Qo'llashning Amaliy Xususiyatlari

Fraktallarni matematik analizda qo'llashning amaliy ahamiyati juda katta. Fraktallar orqali murakkab tizimlar va jarayonlar aniqroq tushuniladi va ularning matematik tavsifi beriladi. Fraktallarni analizda qo'llash, asosan, ular bilan bog'liq bo'lgan tizimlarni modellashtirish va bashorat qilish imkoniyatlarini taqdim etadi. Masalan:

a) **Iqtisodiy tizimlar:** Fraktallar iqtisodiy bozorlar va iqtisodiy tizimlarni modellashtirishda qo'llaniladi. Ular orqali bozorlarning murakkab o'zgarishlarini va ijtimoiy tizimlarni tahlil qilish mumkin.

b) **Tabiatdagi tizimlar:** Tabiatdagi fraktal tuzilmalar, masalan, bulutlar, o'rmonlar, tog' tizmalari va daryo irmoqlari, matematik analiz yordamida yaxshiroq tushuniladi va ularga tegishli tenglamalar ishlab chiqiladi.

Fraktallarning amaliy qo'llanilishi

Fraktallar turli sohalarda keng qo'llanilmoqda. Quyida ularning amaliy foydalanish yo'nalishlari keltirilgan:

- **Grafika va dizayn:** Fraktallar yordamida san'at asarlari, kompyuter grafikasi, reklama dizaynlari va animatsiyalar yaratishda foydalaniladi. Fraktallar tabiiy manzaralarni realistik tasvirlashda ishlatiladi.
- **Tibbiyot:** Fraktallar biologik tuzilmalarni modellashtirishda, yurak ritmlari, miya neyron tarmoqlarini tahlil qilishda qo'llaniladi. Masalan, MRI va CT skanerlari orqali kasalliklarni aniqlashda fraktal analiz samarali usul sifatida foydalaniladi.
- **Iqtisodiyot:** Fraktallar moliyaviy bozorlarning murakkab dinamikasini tushunishda yordam beradi. Bozor harakatlari va narxlarning o'zgarishini prognoz qilish uchun fraktal analiz qo'llaniladi.
- **Muhandislik:** Telekommunikatsiya va aloqa tizimlarida fraktal antennalar keng tarqalgan bo'lib, ular kichik o'lchamlarda samarali ishlaydi va signallarni yaxshiroq uzatishga imkon beradi.
- **Ekologiya:** Fraktallar ekotizimlarni modellashtirish, o'rmonlarning o'sish dinamikasi, iqlim o'zgarishlari va yerning eroziyasi kabi jarayonlarni tushunishda muhim ahamiyatga ega.

Fraktallar va zamonaviy texnologiyalar

Zamonaviy texnologiyalarda fraktallar asosida ilg'or tadqiqotlar va amaliy ishlanmalar olib borilmoqda. Quyidagi yo'nalishlarda fraktallarning ahamiyati katta:

- **Kompyuter grafikasi va animatsiya:** Fraktallar tabiiy manzaralar, murakkab yuzalar va ob'ektlarning realistik modellarini yaratishda keng qo'llaniladi. Masalan, filmlarda va video o'yinlarda tog'lar, bulutlar va daraxtlar kabi murakkab tabiiy obyektlarni realistik tasvirlash uchun fraktallar ishlatiladi.
- **Sun'iy intellekt va neyron tarmoqlar:** Fraktallar ma'lumotlarni qayta ishlash va tahlil qilishda samaradorlikni oshirish uchun neyron tarmoqlarda ishlatiladi. Masalan, tasvirlarni segmentatsiya qilish, genetik algoritmlar va ma'lumotlarni siqish kabi sohalarda fraktallar orqali yaxshiroq natijalarga erishish mumkin.
- **Kvant fizikasi:** Kvant tizimlarning fazoviy tasvirlanishida fraktallar matematik modellar sifatida foydalaniladi. Kvant mexanikasida elektron harakati va kvant to'lqin funksiyalarining tavsifida fraktallar muhim vosita hisoblanadi.

- **Telekommunikatsiya va signal qayta ishlash:** Fraktallar yordamida siqilgan ma'lumotlarni tiklash, shovqinni filtrlash va antennalar dizaynida innovatsion yondashuvlar ishlab chiqilgan. Ayniqsa, mobil aloqa tarmoqlarida fraktal antennalar kichik hajm va keng chastota diapazonini ta'minlash uchun ishlatiladi.

- **Biotibbiyot va tibbiy tasvirlash:** Fraktallar biologik tizimlarning strukturaviy xususiyatlarini o'rganishda qo'llaniladi. Yurak urishi signalining fraktal analizini bajarish, miya neyron tarmoqlarining o'zaro bog'liqligini o'rganish, hamda tibbiy tasvirlarni (MRI, CT) qayta ishlashda fraktallar samarali texnik vosita sifatida ishlatiladi.

- **Iqtisodiyot va moliya:** Fraktallar bozor tebranishlari va iqtisodiy tizimlarning murakkab o'zgarishlarini tahlil qilishda ishlatiladi. Moliyaviy bozorlarning noaniqligi va xaotik harakatlarini fraktal modellar yordamida bashorat qilish mumkin.

Fraktallar matematik analiz va zamonaviy ilm-fan uchun juda muhim tushuncha bo'lib, ularning qo'llanilish doirasi juda kengdir. Ular nafaqat geometriya, fizik jarayonlar, iqtisodiy modellashtirish va boshqa ilmiy sohalarda, balki sun'iy intellekt, kompyuter grafikasi va tibbiyotda ham muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda. Fraktallar murakkab va o'z-o'ziga o'xshash tuzilmalar bo'lib, ularning geometriyasi va matematik tahlili murakkab tizimlarni o'rganishda samarali vosita bo'lib xizmat qiladi.

Fraktallarni matematik analizda qo'llashning asosiy afzalligi shundaki, ular tasodifiy va deterministik tizimlarning dinamikasini yaxshiroq tushunishga imkon beradi. Xaos nazariyasi, stokastik jarayonlar va differensial tenglamalar yordamida fraktallarni o'rganish tizimlarning murakkabligini va ularning o'zgarishlarining oldindan bashorat qilinishini imkoniyatlarini taqdim etadi. Shuningdek, fraktallarni fraksional o'lchovlar, Hausdorff o'lchovi va boshqa maxsus matematik vositalar yordamida tasvirlash orqali turli xil fizik va biologik jarayonlarni modellashtirish mumkin.

Zamonaviy texnologiyalarni rivojlantirishda fraktallar katta ahamiyatga ega. Kompyuter grafikasi, animatsiya, telekommunikatsiya, signal qayta ishlash, tibbiy tasvirlash va iqtisodiy modelash sohaslarida fraktallar asosida ilg'or tadqiqotlar olib borilmoqda. Ayniqsa, sun'iy intellekt, neyron tarmoqlar va kvant fizikasi kabi zamonaviy sohalarda fraktallarni qo'llash ilmiy izlanishlar va amaliy yechimlar uchun yangi imkoniyatlar yaratmoqda.

Fraktallarni matematik analizda qo‘llashning yana bir muhim jihati shundaki, ular murakkab tizimlarni tushunishda yangi yondashuvlar va metodlarni yaratishga imkon beradi. Fraktal geometrik tuzilmalar, ularning o‘lchovlari va matematik analizlari yordamida yangi fizik modellar, iqtisodiy prognozlar va biologik tizimlarni tahlil qilish mumkin. Shuningdek, fraktallar turli tizimlarning xususiyatlarini yanada aniqroq ifodalashga imkon beradi, bu esa ilm-fan va amaliyotda fraktallarni yanada kengroq qo‘llash imkoniyatlarini taqdim etadi.

Xulosa qilib aytganda, fraktallar matematik analizda va zamonaviy ilm-fan sohasida muhim o‘rin tutadi. Ularning o‘z-o‘ziga o‘xshashlik xususiyatlari, murakkablik va noaniqlikni tushunishga yordam beradigan geometrik tuzilmalari zamonaviy ilmiy va texnologik tadqiqotlarda yangi yondashuvlar yaratadi. Fraktallarni o‘rganish orqali murakkab tizimlarni modellash va tahlil qilish imkoniyatlari kengayadi, bu esa nafaqat matematikani, balki boshqa ko‘plab ilmiy va amaliy sohalarni ham rivojlantirishga olib keladi.

Adabiyotlar:

1. Mandelbrot, B. (1982). The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman and Company.
2. Falconer, K. (2003). Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons.
3. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. (1992). Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. Springer-Verlag.
4. Barnsley, M.F. (1993). Fractals Everywhere. Academic Press.
5. Schroeder, M. (1991). Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise. W.H. Freeman and Company.