ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASHNING TO‘G‘RI TO‘RTBURCHAKLAR USULI VA TRAPETSIYALAR USULINI TAQQOSLASH VA AYRIM SOHALARDAGI TUTGAN O‘RNI

Farg’ona davlat universiteti amaliy-matematika kafedrasi katta o‘qituvchisi

Ismoilov Axrorjon Ikromjonovich

ismoilovaxrorjon@yandex.com

Farg’ona davlat universiteti fizika-matematika fakulteti 2-bosqich talabasi

Imomnazarov Saidolim Saidahmad o‘g‘li

saidolimimomnazarov1@gmail.com

Farg’ona davlat universiteti fizika-matematika fakulteti 2-bosqich talabasi

Abdullayev Abrorbek Dilmurodjon o‘g‘li

aadabdullayev1@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada aniq integralni taqribiy hisoblashning ikki asosiy usuli — to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli va trapetsiyalar usuli o‘rganiladi va ularning matematik mohiyati, hisoblash algoritmlari hamda aniqlik darajalari taqqoslab tahlil qilinadi. Har bir usulning afzallik va kamchiliklari amaliy misollar asosida ko‘rib chiqiladi. Shuningdek, bu usullar kompyuter grafikasi, muhandislik, iqtisodiyot kabi real sohalarda qanday qo‘llanilishi, hisoblash natijalari qanday aniqlikka ega bo‘lishi va ularni tanlash mezonlari haqida ham to‘xtalib o‘tiladi. Maqola yakunida ikki usulning samaradorligi, qo‘llanish holatlari va optimal tanlash bo‘yicha xulosalar keltirilgan.

Kalit so‘zlar: Aniq integral, taqribiy hisoblash, to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli, trapetsiyalar usuli, matematik analiz, sonli usullar, integral ostidagi maydon, funksiya grafigi, trapetsiya formulasi, kompyuter yordamida hisoblash, aniqlik darajasi, integral geometriya, oraliqni bo‘lish, numerik metodlar, egri chiziqli maydon, hisoblash algoritmi.

Аннотация: В данной статье рассматриваются два основных метода приближённого вычисления определённого интеграла — метод прямоугольников и метод трапеций. Подробно анализируются математическая сущность этих методов, алгоритмы вычислений и уровень точности. Преимущества и недостатки каждого метода показаны на практических примерах. Также рассматривается применение данных методов в таких реальных областях, как компьютерная графика, инженерия и экономика, и оценивается точность результатов и критерии выбора метода. В заключении статьи приведены выводы о целесообразности применения каждого метода в зависимости от задач.

Ключевые слова:Определённый интеграл, приближённое вычисление, метод прямоугольников, метод трапеций, математический анализ, численные методы, площадь под графиком функции, график функции, формула трапеции, вычисления на компьютере, уровень точности, интегральная геометрия, разделение отрезка, численные алгоритмы, криволинейная площадь, алгоритм вычислений.

Abstract: This paper examines two fundamental methods of approximating definite integrals — the rectangle method and the trapezoidal method. It provides a comparative analysis of their mathematical basis, computational algorithms, and accuracy levels. The advantages and disadvantages of each method are demonstrated through practical examples. Additionally, the paper explores how these methods are applied in real-world fields such as computer graphics, engineering, and economics, with emphasis on the accuracy of the results and the criteria for selecting the appropriate method. The conclusion summarizes the efficiency of both methods and offers recommendations for their optimal use.

Keywords: Definite integral, approximate calculation, rectangle method, trapezoidal method, mathematical analysis, numerical methods, area under the curve, function graph, trapezoidal formula, computer-based computation, accuracy level, integral geometry, interval subdivision, numerical algorithms, curvilinear area, calculation algorithm.

Kirish

Aniq integral tushunchasi matematik analizda muhim o‘rin egallaydi va ko‘plab amaliy masalalarni yechishda ishlatiladi. Masalan, maydonni, hajmni, ishni, energiyani aniqlashda aniq integrallardan keng foydalaniladi. Biroq barcha funksiyalar uchun aniq integralni analitik (ya’ni, formulalar orqali) hisoblash imkoniyati mavjud emas. Ayniqsa, funksiyaning ifodasi murakkab bo‘lsa yoki elementar funksiyalar orqali ifodalanmasa, integralni qo‘lda hisoblash imkoni bo‘lmaydi.

Shunday holatlarda sonli usullar yordamida integral qiymatini taxminiy aniqlash zarur bo‘ladi. Bu usullar integral ostidagi funksiyani oddiy geometrik shakllar — masalan, to‘g‘ri to‘rtburchaklar yoki trapetsiyalar yordamida yaqinlashtirishga asoslanadi. Eng sodda va keng tarqalgan usullardan ikkitasi bu — to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli va trapetsiyalar usulidir. Mazkur maqolada ushbu ikki usulning nazariy asoslari, hisoblash formulalari, afzallik va kamchiliklari hamda real misollar orqali aniqlik darajalari o‘rganiladi. Metodlarning o‘zaro taqqoslanishi orqali, ularning qaysi holatlarda samaraliroq ekani aniqlanadi.

Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Ko‘plab funksiyalar uchun boshlang‘ich funksiyani analitik tarzda aniqlash yoki integralni aniq hisoblash har doim ham imkoni bo‘lavermaydi. Ayniqsa, murakkab yoki elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydigan funksiyalar uchun bu yanada qiyinlashadi. Bunday hollarda sonli usullar yordamida aniq integralni taqribiy hisoblash zarurati tug‘iladi.

Aniq integral quyidagicha ifodalanadi:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Agar qaralayotgan oraliqda $f(x) \approx const$ bo‘lsa, u vaqtda quyidagicha bo’ladi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Bu integralning geometrik ma'nosi - $[a,b]$ oraliqda $f(x)$ funksiyasi grafigi ostidagi egri chiziqli trapetsiya yuzini ifodalaydi. Ushbu yuzani taqribiy topish uchun eng sodda va amaliy usullar quyidagilardan iborat. To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli, Trapetsiyalar usuli, Simpson (parabolalar) usuli. Quyida ushbu usullardan dastlabki ikkitasi - to‘g‘ri to‘rtburchaklar va trapetsiyalar usullari atroflicha ko‘rib chiqiladi.

To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli

Bu usulda integral ostidagi funksiyaning qiymatlari bo‘yicha oraliqni teng bo‘laklarga bo‘lib, har bir bo‘lak ostida to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzasi quriladi. Bunda har bir to‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi funksiyaning o‘sha bo‘lakdagi nuqtasidagi qiymatiga teng bo‘ladi.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Bu yerda bo‘linish qadam ya’ni h quyidagicha topiladi:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Har bir to‘rtburchakning markaziy nuqtasini quyidagicha hisoblaymiz:

$$x_0 = a + \frac{h}{2}$$

1. $x_1, x_2, \dots, x_3$ nuqtalardan chegaraviy egri chiziq bilan kesishgunga qadar perpendikulyar o‘tkazamiz va kesishish nuqtalarning ordinatalarini quyidagicha belgilaymiz;

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots., y_n = f(x_n)$$

2. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ nuqtalardan chapga qarab gorizontal ravishda mos holda $(x_0, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_n)$ nuqtalargacha bo‘lgan kesma o‘tkazamiz va hosil qilingan har bir to‘g‘ri to‘rtburchak yuzini topamiz:

$$y_1 h, y_2 h, \dots, y_n h$$

3. n ta to‘g‘ri to‘rtburchak yuzini qo‘shamiz:

$$S = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Bundan to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Misol: Quyidagi integralni $n = 4$ bo‘lganda hisoblaymiz.

$$\int_0^2 \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

Yechish:

1. [0, 2] kesmani h = 0,5 qadam bilan 4 ta bo'lakka bo'lib olamiz va x larni topamiz. Natija quyidagicha bo'ladi: x_0*=0,25,* x_1*=0.75,* x_2*=1,25* x_3*=1.75 va* x_4*=2.25*

2. Har bir x ga mos y ni hisoblaymiz va S umumiy qiymatni topamiz ya'ni quyidagicha:

$$f(0.5)=\frac{\sin(0.75^2)}{0.75^2}\approx\frac{0.5340}{0.5625}=0.9493 \qquad f(1)=\frac{\sin(1.25^2)}{1.25^2}\approx\frac{0.9990}{1.5625}\approx 0.6393$$

$$f(1.5)=\frac{\sin(1.75^2)}{1.75^2}\approx\frac{0.0785}{3.0625}\approx 0.0256 \qquad f(2)=\frac{\sin(2.25^2)}{2.25^2}\approx\frac{-0.9425}{5.0625}\approx -0.1862$$

$$S=h(y_1+y_2+...+y_n)=0.5(0.9493+0.6393+0.0256+(-0.1862))=0.714$$

Trapetsiyalar usuli

$f(x)$ funktsiya chiziqli funktsiyaga yaqin bo'lsin, u xolda tabiiy ravishda integralni balandligi $b-a$ ga va asoslari $f(a)$ va $f(b)$ ga teng bo'lgan trapetsiya yuzi bilan almashtirish mumkin, u holda quyidagicha formula kelib chiqadiva bu formula *trapetsiya formulasi* deyiladi.

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}(f(a)=f(b))$$

Trapetsiyalar usuli algoritmi $[a,b]$ kesmani $a=x_0,x_1,x_2,...,x_n=b$ nuqtalar bilan n ta teng bo'lakka bo'lamiz. Har bir qo'shni bo'luvchi nuqtalar orasidagi masofa

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$[a,b]$ kesmani bo'luvchi nuqtalardan chegaraviy egri chiziq bilan keishgunga qadar perpendikulyar o'tkazamiz va perpendikulyarlarning $y=f(x)$ chiziq bilan kesishgan qo'shni nuqtalarini vatarlar bilan birlashtiramiz va hosil qilingan har bir to'g'ri chiziqli trapet siyalarning yuzini topamiz.

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2)\ ),\ ...,\ x$$

$$S_0=\frac{y_0+y_1}{2}h,\ S=h(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+...+\frac{y_n}{2}),\ ...,\ S_n=\frac{y_n+y_{n-1}}{2}h$$

Barcha n ta trapetsiya yuzini qo'shamiz.

$$S = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + \frac{y_n}{2})$$

Misol: Quyidagi integralni $n = 4$ bo‘lganda hisoblaymiz.

$$\int_0^2 \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

Yechish:

1. $[0,2]$ kesmani $h = 0.5$ qadam bilan 4 ta bo‘lakka bo‘lib olamiz;

So’ng natija quyidahicha bo‘ladi: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ va $x_4 = 2$.

2. Har bor x ga mos y larni aniqlaymiz va umiyiy S ni hisoblaymiz.

$$f(0) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1 \qquad f(0.5) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{\sin(0.5^2)}{0.5^2} = \frac{0.2474}{0.25} = 0.9896$$

$$f(1) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{\sin(1^2)}{1^2} = 0.8415 \qquad f(1.5) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{\sin(1.5^2)}{1.5^2} = \frac{0.7781}{2.25} = 0.3458$$

$$f(2) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{\sin(2^2)}{2^2} = \frac{-0.7568}{4} = -0.1892$$

S ni hisoblaymiz:

$$S = \int_0^2 \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\right] =$$

$$= \frac{0.5}{2}\left[1 + 2(0.9896 + 0.8415 + 0.3458) - 0.1892\right] = 0.25\left[1 + 4.3538 - 0.1892\right] =$$

$$= 0.25 \cdot 5.1646 \approx 1.291$$

Tahlil:

Aniq integralni taqribiy hisoblashni ikki xil usulda ko‘rib chiqdik. Bundan ular orasidagi asosiy farq ularning qanchalik aniqlikda ishlashidir. To‘g‘rti to‘rtburchak usuli va trapetsiya usulining o‘xshashlik joyi har boshlang‘ich olib bo‘lmaydigan aniq integralni taqribiy hioblay olishi va bu jarayondagi h qadam ni topish hisoblanadi, ya’ni har ikkisida ham h qadam bir xil. Lekin x, y va S har ikki usulda farq qiladi. Bularni quyidagicha ko‘rish mumkin.

To‘g‘rti to‘rtburchak usuli: $x_0 = a + \frac{h}{2}$ $\qquad S = h(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n)$

Trapetsiya usuli: $x_0 = a$ $$S = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + \frac{y_n}{2})$$

Ko‘rinib turibdiki to‘g‘rti to‘rtburchak usulida x_0 ni aniqlashimiz kerak bo‘ladi ammo trapetsiya usulida esa x_0 a ga teng. Va ya’na shu ma’lumki to‘g‘rti to‘rtburchak usulida x_0 faqatgina keyingi x larni aniqlash uchun ishlatiladi, ammo trapetsiya usulida y_0 va y_0 zarur hisblanadi.

Aniqlashtirish usullarining qo‘llanilishi va amaliy foydasi:

Aniq integralni taqribiy hisoblash usullari, xususan to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli va trapetsiyalar usuli, nazariy matematikadan tashqari, turli amaliy sohalarda keng qo‘llaniladi. Ushbu usullar yordamida real muammolarning soddalashtirilgan matematik modellarini tuzish, ularni hisoblash va tahlil qilish imkoniyati yaratiladi. Quyida ularning ayrim muhim qo‘llanish sohalari va foyda jihatlari keltirilgan.

Kompyuter grafikasi va raqamli tasvirlashda ham keng qo’llaniladi. Kompyuter grafikasi — bu tasvirlarni, animatsiyalarni va vizual effektlarni yaratish bilan shug‘ullanuvchi soha bo‘lib, unda integralni taqribiy hisoblash asosiy rol o‘ynaydi. Masalan:

1. Egri chiziqli sirtlar ostidagi maydonni hisoblash - tasvirlardagi silliq o‘tishlarni ta’minlaydi.

2. Yorug‘lik taqsimoti (light shading) - tasvirga realizm berishda integral ifodalar yordamida aniqlanadi.

3. Alpha blending (yarim shaffoflik) - ikki tasvirning bir-biriga aralashtirilishini hisoblashda qo‘llaniladi.

Trapetsiyalar usuli bu sohada aniqroq natijalar berishi sababli, sifatli renderlar va yuqori aniqlik talab qilinadigan grafik modellashtirishda afzal ko‘riladi. To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli esa tezlik va soddalik talab qilinadigan real-time animatsiyalar va o‘yin dvijoklarida keng ishlatiladi.

Muhandislik sohasida integral yordamida *kuch va energiya* ni hisoblash, yuklama taqsimoti, *suyuqlik oqimining umumiy hajm*i, *sirtlar orqali o‘tayotgan oqim* kabi muhim fizikaviy kattaliklar aniqlanadi. Agar funksiyaning aniq formulasi yo‘q yoki faqat eksperimental o‘lchovlar mavjud bo‘lsa, taqribiy integral usullari ayniqsa muhim bo‘ladi. Bu yerda trapetsiya usuli odatda yuqoriroq aniqlikni beradi, ayniqsa egri chiziqli o‘zgaruvchilar bilan ishlaganda.

Iqtisodiyot va moliyaviy modellashtirishda bozorning umumiy tendensiyasini baholash, foiz daromadlarini hisoblash, narx o‘zgarishidan keladigan umumiy foydani aniqlash kabi hollarda integral qo‘llaniladi. Bu sohalarda trapetsiya usuli to‘liqroq rasm hosil qilish uchun ishlatiladi, ayniqsa agar vaqtga bog‘liq noaniq o‘zgarishlar mavjud bo‘lsa.

Xulosa

Aniq integralni taqribiy hisoblash masalasi amaliy matematikaning muhim yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, ko‘plab ilmiy va texnik sohalarda qo‘llaniladi. Ushbu maqolada taqribiy hisoblashning ikki asosiy usuli — to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli va trapetsiyalar usuli taqqoslab o‘rganildi. Bu usullarning har biri o‘zining soddaligi, aniqligi va hisoblash samaradorligi jihatidan farqlanadi. To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli hisoblash jihatidan eng oddiy bo‘lib, tezkor natijalar berishi bilan ajralib turadi. Ammo bu usulda aniqlik pastroq bo‘lishi mumkin, ayniqsa integrallanayotgan funksiya o‘zgaruvchan yoki egri shaklda bo‘lsa. Trapetsiyalar usuli esa nisbatan murakkabroq bo‘lishiga qaramay, yuqoriroq aniqlikni ta’minlaydi. Bu usulda har bir intervallar o‘rtasidagi egri chiziqlarni to‘g‘ri chiziqlar bilan bog‘lash orqali maydon hisoblanadi, bu esa hisoblashda tabiiy silliqlikni saqlash imkonini beradi.

Amaliy jihatdan bu usullar kompyuter grafikasi, muhandislik, iqtisodiyot, fizik modellashtirish kabi sohalarda keng qo‘llaniladi. Masalan, grafikadagi yorug‘likni modellashtirish, sirt maydonini hisoblash yoki eksperimental ma’lumotlardan integral qiymatni topishda bu usullar muhim vosita bo‘lib xizmat qiladi. Samaradorlik nuqtai nazaridan, agar tezlik va soddalik ustuvor bo‘lsa, to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli qulayroq. Ammo aniqlik va silliq o‘zgarishlarni inobatga olish muhim bo‘lsa, trapetsiyalar usuli afzalroq sanaladi. Xulosa qilib aytganda, har ikkala usul ham o‘z joyida foydali bo‘lib, ularni tanlash konkret vazifaga, mavjud ma’lumotlarga va talab qilinadigan aniqlikka qarab belgilanadi. Shu bois, ularni puxta o‘rganish va amaliy masalalarga mos holda qo‘llay bilish — zamonaviy ilmiy va texnik faoliyatda muhim ko‘nikmadir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.Ismoilov A.I. Sonli usullar. O‘quv uslubiy ko‘rsatma. Farg‘ona. 2023 y. 80 b

2.Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1-qism. -Toshkent.: O‘qituvchi. 2003 y. 400 b.

3.Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 2-qism. -Toshkent.: Iqtisod-Moliya. 2008 y. 320 b

4.Ismatullayev G.P., Koshergenova M.S. Hisoblash usullari. -T.: Tafakkur bo‘stoni. 2014 y. 240 b.

5.Imomov A, Toshboev S.Hisoblash usullari. O‘quv qo‘llanma. -Toshkent.: O‘ZKITOBSAVDONASHRIYOTI NMIU. -2023. - 120 b.

6.SHadmanov I.U., Nasirova Sh.N. Sonli usullar. o‘quv qo‘llanma. - Buxoro. 2023 y. 145 b.

7.Abdulhamidov A.U., Xudoynazarov S.X. Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari. -Toshkent.: O‘zbekiston. 1995 y. 224 b

8.Aloev R.D., Xudoyberganov M. Hisoblash usullari kursidan laboratoriya mashg‘ulotlari to‘plami. UzMU.O‘quv qo‘llanma. 2008 y. 106 b

9.Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. Учебное пособие. Интернет-Университет Информационных Технологи; БИНОМ. 2006.-523с.

10.Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. Учебное пособие. Интернет-Университет Информационных Технологи; БИНОМ. 2006.-523с.

11.Richard L. Burden, J.Doudlas Faires. Numerical Analysis,Youngstown State University, Boston, USA, Brooks/Cole,20l1.

12.Scop L.R. Numerical Analysis. Pripcetop University Press, 2011. - 342 r.

13.Гателюк О.В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования.-Москва: Издательство Юрайт, 2023. —140 с. https://urait.ru/bcode/514036

14.Пирумов У.Г. Численные методы: учебник и практикум для академического бакалавриата.-Москва: Издательство Юрайт. 2019. —421 с.https://urait.ru/bcode/431961

15.https://math.semestr.ru/

16.http://www.ievbras.ru/ecostat/Kiril/Article/A18/Vol2/Kramar2

17.https://lanbook.com/catalog/discipline/vychislitelnaya-matematika/

18.https://www.litres.ru/tags/vychislitelnaya-matematika/

19.http://fizmatkniga.org/catalog/section-144/

20.https://urss.ru/cgi-bin/db.pl

21.https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm