CHIZIQLI BO‘LMAGAN INTEGRAL TENGLAMALARNI ITERATSION SONLI YECHISH

Ismoilov Axrorjon Ikromjonovich

Farg’ona Davlat Universiteti amaliy matematika va informatika kafedrasi katta o‘qituvchisi

Email: ismoilovaxrorjon@yandex.com

Rahimova Zarifaxon Shuxratjon qizi

Farg’ona Davlat Universiteti “Kompyuter ilmlari va dasturlash texnologiyalari” yo’nalishi 23.12-guruh 2-bosqich talabasi

Email: zarifaxonrahimova04@gmail.com

Sahobiddinov Adhamjon Vohidjon o‘g‘li

Farg’ona Davlat Universiteti “Kompyuter ilmlari va dasturlash texnologiyalari” yo’nalishi 23.12-guruh 2-bosqich talabasi

Email: sahobiddinovadhamjon@gmail.com

Annotatsiya Ushbu maqolada chiziqli bo‘lmagan integral tenglamalarni sonli usullar yordamida yechish masalasi ko‘rib chiqilgan. Bunda iteratsion yondashuvlarning mohiyati va ularning konvergensiyasi tahlil qilinadi. Newton-Kantorovich va Picard iteratsiyalari singari metodlarning qo‘llanilish xususiyatlari, ularning afzalliklari va cheklovlari amaliy misollar orqali yoritilgan. Bu usullar integral operatorlar uchun sonli taxminlar olishda muhim vosita hisoblanadi. Maqola chiziqli bo‘lmagan modellar asosida fizik jarayonlarni tahlil qilishda samarali algoritmlarni ishlab chiqish uchun foydalidir.

Kalit so‘zlar: Integral tenglama, chiziqli bo‘lmaganlik, iteratsion usul, Picard metodi, Newton-Kantorovich yondashuvi.

Аннотация: В данной статье рассматривается задача численного решения нелинейных интегральных уравнений с помощью итерационных методов. Особое внимание уделено методам Пикара и Ньютона-Канторовича, их применимости, сходимости и численной устойчивости. Также приводятся примеры реализации этих методов и анализируются их преимущества и ограничения. Полученные результаты могут быть полезны при построении численных алгоритмов для моделирования физических процессов, описываемых нелинейными интегральными уравнениями.

Ключевые слова: Интегральное уравнение, нелинейность, итерационный метод, метод Пикара, подход Ньютона-Канторовича.

Annotation: This article addresses the numerical solution of nonlinear integral equations using iterative methods. Special focus is given to the Picard and Newton-Kantorovich methods, including their applicability, convergence properties, and numerical stability. Examples are provided to illustrate the implementation and behavior of these methods. The results can be applied to develop efficient numerical algorithms for modeling physical processes governed by nonlinear integral equations.

Keywords: Integral equation, nonlinearity, iterative method, Picard method, Newton-Kantorovich approach.

Kirish

Integral tenglamalar – ko‘plab matematik fizika, texnika va muhandislik modellarining ajralmas qismi hisoblanadi. Ular orqali issiqlik almashinuvi, elektromagnit to‘lqinlar tarqalishi, elastiklik nazariyasi kabi ko‘plab fizik jarayonlar ifodalanadi. Ayniqsa, chiziqli bo‘lmagan integral tenglamalar real tizimlarning noaniqligini ifodalashda muhim rol o‘ynaydi. Bunday tenglamalarni analitik yechish har doim ham imkoni bo‘lmaganligi sababli sonli iteratsion usullar muhim ahamiyat kasb etadi.

Chiziqli bo‘lmagan integral tenglamalar haqida tushuncha

Chiziqli bo‘lmagan Volterra tenglamasi:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K\big(x, t, \varphi(t)\big)dt$$

Fredgolm tipi:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K\big(x, t, \varphi(t)\big)dt$$

Bu yerda $\mathrm{K}\big(x, t, \varphi(t)\big)dt$ – yechim ostida noliniy qatnashuvchi yadro.

Iteratsion usullar mohiyati

1. Picard iteratsiyasi

Picard iteratsion usuli quyidagi ketma-ketlik orqali aniqlanadi:

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K\big(x, t, \varphi_n(t)\big)dt\,, \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

Bu yerda K(x,t,ϕ(t)) — noliniy yadro funksiyasi bo‘lib, yechim ϕ(t) integral ichida chiziqli bo‘lmagan shaklda (masalan, kvadrat, sinus, logarifm va h.k.) qatnashadi. Bu usul oddiy va tushunarli bo‘lsa-da, kuchli chiziqli bo‘lmaganlik mavjud bo‘lganda konvergensiyani kafolatlamaydi.

2. Newton-Kantorovich usuli

Bu usul chiziqli bo‘lmagan operator tenglamani **lokal chiziqlashtirib**, yechimni takomillashtiradi:

Formulasi:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - [F'(\varphi_n)]^{-1}\mathrm{F}(\varphi_n)$$

Bu yerda:

F — integral operator (chiziqli bo‘lmagan);

F′ — uning Fréchet hosilasi (ya’ni operatorning differensiali).

Sonli yechim algoritmi (Kress, 1999 asosida)

Quyidagi bosqichlar chiziqli bo‘lmagan integral tenglamani sonli iteratsion yechish uchun qo‘llaniladi:

1. **Yadro funksiyasini diskretlashtirish (kvadratura usuli bilan);**

Misol:

Tenglama:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x ((x-t)\varphi(t)^2)dt$$

Bu yerda yadro: K(x,t)=x−t — yadro funksiyasi, ammo yechim kvadratik qatnashganligi sababli butun tenglama chiziqli bo‘lmagan bo‘ladi.

Kvadratura usuli (masalan, to‘g‘ri burchaklar metodi) orqali bu integral:

$$\int_0^x (x-t)(\varphi(t))^2\,dt \approx \sum_{j=0}^{i} (x_i - t_j)(\varphi(t_j))^2 \times h$$

Bu yondashuv orqali integralni hisoblash oddiy ko‘paytmalar va yig‘indilar bilan almashtiriladi.

2. **Boshlang‘ich yechim taxminini tanlash** $\left(\boldsymbol{\varphi_0(x)}\right)$;

Integral tenglamani iteratsiya orqali yechishda boshlang‘ich taxmin muhim rol o‘ynaydi. Eng oddiy holatda:

Misollar:

$\varphi_0(x) = 1$ – barcha x uchun bir xil qiymat

$\varphi_0(x) = x + 1$ – chiziqli funksiya

$\varphi_0(x) = \sin(x)$ — silliq, noliniy boshlang‘ich yechim

Bu yechimlar iteratsiyani boshlash uchun zarur va ular natijaga ta’sir qilishi mumkin.

3. Iteratsion formula asosida yangilash;

Har bir bosqichda yangi yechim quyidagi shakldа hisoblanadi:

$$\varphi_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x (x - t)(\varphi_n(t))^2 dt$$

Bu iteratsion formula yordamida:

Oldingi iteratsiyadagi yechim $\varphi_n(t)$

Undan hosil qilingan integral

Yangilangan qiymat $\varphi_{n+1}(x)$

4. To‘xtash mezoniga asoslangan tugatish.

Iteratsion hisoblashni cheksiz davom ettirish kerak emas. Shuning uchun to‘xtash mezoni belgilanadi:

Bu yerda $\varepsilon = 10^{-6}$ yoki 10^{-4} kabi kichik son bo‘ladi.

Misol:

$$\max |\varphi_{n+1}(x_i)| < \varepsilon$$

Bu yerda $\varepsilon = 10^{-6}$yoki 10^{-4}kabi kichik son bo‘ladi.

Agar barcha nuqtalarda yangi va eski qiymatlar o‘rtasidagi farq etarlilik darajasidan kichik bo‘lsa, iteratsiya tugatiladi. Bu yechimning barqaror va yetarli aniqlikda topilganini bildiradi.

Amaliy misol

Quyidagi Volterra turidagi integral tenglamani ko‘rib chiqamiz:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (\varphi(t))^2\,dt$$

Picard iteratsiyasi uchun:

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x (\varphi(t))^2\,dt = 1 + x$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x ((1 + t))^2\,dt = 1 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$$

Ushbu iteratsiyalar tez konvergent bo‘lib, yechimga yaqinlashadi.

C#dagi dastur kodi

```
using System;

class NonlinearIntegralSolver
{
    static void Main()
    {
        int N = 100; // nuqtalar soni
        double a = 0.0, b = 1.0; // integrallash oraliq
        double h = (b - a) / N; // qadam
        int iterations = 5;

        double[] x = new double[N + 1];
        double[] phiOld = new double[N + 1];
        double[] phiNew = new double[N + 1];
```

```
// x to‘rni aniqlash va boshlang‘ich yechim: phi0(x) = 1
for (int i = 0; i <= N; i++)
{
    x[i] = a + i * h;
    phiOld[i] = 1.0;
}

// Iteratsion jarayon
for (int it = 1; it <= iterations; it++)
{
    for (int i = 0; i <= N; i++)
    {
        double sum = 0.0;
        for (int j = 0; j <= i; j++)
        {
            double phiSquared = phiOld[j] * phiOld[j];
            sum += phiSquared * h;
        }
        phiNew[i] = 1.0 + sum;
    }

    // phiNew → phiOld ni o‘tkazamiz
    for (int i = 0; i <= N; i++)
    {
        phiOld[i] = phiNew[i];
    }

    Console.WriteLine($"Iteratsiya {it}: phi(1) ≈ {phiNew[N]:F6}");
}
```

```
            // Natijani chiqarish
            Console.WriteLine("\nNatijaviy funksiyaning qiymatlari:");
            for (int i = 0; i <= N; i += 10)
            {
                Console.WriteLine($"x = {x[i]:0.00}, phi(x) ≈ {phiNew[i]:F6}");
            }
        }
    }
```

Natija:

```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio
Iteratsiya 1: phi(1) ? 2,010000
Iteratsiya 2: phi(1) ? 3,388751
Iteratsiya 3: phi(1) ? 5,324576
Iteratsiya 4: phi(1) ? 8,110972
Iteratsiya 5: phi(1) ? 12,265025

Natijaviy funksiyaning qiymatlari:
x = 0,00, phi(x) ? 1,010205
x = 0,10, phi(x) ? 1,125093
x = 0,20, phi(x) ? 1,269667
x = 0,30, phi(x) ? 1,457086
x = 0,40, phi(x) ? 1,709164
x = 0,50, phi(x) ? 2,063816
x = 0,60, phi(x) ? 2,590242
x = 0,70, phi(x) ? 3,421135
x = 0,80, phi(x) ? 4,823567
x = 0,90, phi(x) ? 7,360119
x = 1,00, phi(x) ? 12,265025
```

Izoh:

Har bir iteratsiyada ϕ(x)funksiyaning qiymatlari yaxshilanadi va yechimga yaqinlashadi.

phi(1) qiymatining tez o‘sishi bu masalaning chiziqli bo‘lmaganligidan dalolat beradi.

Xulosa: Chiziqli bo‘lmagan integral tenglamalarni sonli yechish dolzarb muammo bo‘lib, fizik va texnik modellarni tahlil qilishda muhim ahamiyat kasb etadi. Iteratsion usullar, ayniqsa Picard va Newton-Kantorovich metodlari – yechim olishda eng ko‘p qo‘llaniladigan yondashuvlardir. Biroq har bir usulning konvergensiya va barqarorlik xususiyatlarini sinchiklab tahlil qilish lozim. Kelgusida ushbu metodlar asosida optimallashtirilgan algoritmlar ishlab chiqilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar (faqat kitoblar)

1. Kress, R. *Linear Integral Equations*. Springer, 1999.
2. Atkinson, K. E. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge University Press, 1997.
3. Hackbusch, W. *Integral Equations: Theory and Numerical Treatment*. Birkhäuser, 1995.
4. Polyanin, A. D., & Manzhirov, A. V. *Handbook of Integral Equations*. CRC Press, 2008.
5. Arfken, G. B., & Weber, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press, 2005.