ANIQMAS INTEGRAL VA UNING TADBIQLARI

Xatamova Munira

O'zbekiston Milliy Universiteti "Tabiiy va aniq " fanlarga ixtisoslashtirilgan S.H.Sirojiddinov nomli akademik litseymatematika o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqola aniqmas integralni hisoblashning ba`zi usullari haqida bo'lib u sakkiz bo'limdan iborat.Har bir bo'limda aniqmas integral hisoblash usullari tushuntirilgan misollar yechimi bilan berilgan

Kalit so'zlar: Boshlang'ich funksiya, bo'lakab va belgilan integrallash , ratsional va irratsional funksiyalarni integrallash, angi o'zgaruvchi kiritish ,trigonometric funksiyalar boshlang'ich funksiyasi

KIRISH

Hozirgi davrda ta'limni axborot texnologiyalarisiz tasavvur qilib bo'lmaydi, mana shu sababli barchamiz «yangi pedagogik texnologiyalar» atamasini ishlata boshladik. Bir misol, shaxsiy kompyuter ta'limning imkoniyatlarini butunlay o'zgartirib yubordi. Internet resurslari ta'lim tizimiga yangi pedagogik texnologiyalarni tadbiq etish bo'yicha yanada kattaroq imkoniyatlar yaratib berdi. O'zbekistonning mustaqilligi sharoitlarida ta'lim tizimini isloh qilish birinchi navbatda ta'lim va tarbiya tizimiga ilg'or axborot texnologiyalarning tatbiq etish bilan bog'liq.

Barkamol, har tomoonlama rivojlangan shaxsni tarbiyalash muammosi tatizimidan yosh avloddan faqat milliy madaniyat yutuqlarini emas, balki umuminsoniy dunyo madaniyati yutuqlarini ham egallab olishga intilishni shakllantirishni talab etadi. Barkamol shaxsni tarbiyalash g'oyasi milliy mustaqillikning ustuvor g'oyalaridan biri hisoblanadi.

Ta'lim sifatini, ma'naviy-g'oyaviy tarbiyasi darajasini oshirish vazifasi hisoblanadi. Kadrlar tayyorlash milliy dasturini amalga oshirish so'zsiz yangi axborot texnologiyalariga asoslanishi zarur. Ta'lim tizimini rag'batlantirmay turib, fuqarolik jamiyatini qurib bo'lmaydi. Ta'lim tizimi yopiq nuqtai nazarlar, qarashlar statik tizimi emas, bir uzluksiz jarayondan iborat bo'lishi kerak. Mustaqil Respublikamizning rivojlanishini kafolatlash uchun ta'lim tizimi dinamik, mukammal bo'lishi kerak.

Integral matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u amaliy (tatbiqiy) masalalarni yechishning kuchli vositalaridan biridir. U tatbiqiy masalaning matematik modeli bo'lib xizmat qiladi. Shuning uchun ham sodda tenglamalarni yechish, turmushda uchrab turadigan ba'zi masalalarni yechishda tenglamalardan foydalana olish matematik madaniyatning muhim ko'rsatkichi bo'lib xizmat qiladi. Shu sababali ham maktab, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari matematika kurslarida tenglamalar mavzusi uzviy o'rganiladi. Bunda o'quvchilar chiziqli, kvadrat tenglamalarni, ularga keltiriladigan tenglamalarni, ratsional tenglamalarni, sodda irratsional tenglamalarni, trigonometrik, ko‘rsatkichli, logarifmik tenglamalarni o‘rganadi. Aniq fanlar yo‘nalishidagi akademik litseylarda aniq integralni hisoblash o‘rganiladi.

Maqolaning maqsadi va vazifalari: Maqolaning maqsadi aniq integralni hisoblash va uning turli masalarda qo’llanilishini o‘rganishdan iborat. Maqolaning nazariy va amaliy ahamiyati:

Integrallar xilma-xil bo‘lgani singari, uni yechish usullari ham turlichadir. Aniq integrallarni qaysidir ma’noda “standartlashdirish”, ya’ni ularni yechish usullari bo‘yicha klassifikatsiyalash, yechish usulini ilmiy asoslash matematikaning vazifalaridan biridir. Ushbu ishning amaliy ahamiyati shundan iboratki, bunda aniq integral ma’lum turlarga klassifikatsiyalangan, ularni yechish usullari ko‘rsatilgan. Ushbu ishda olingan natijalar aniq fanlar yo‘nalishidagi akademik litseylarning matematika ta’limi jarayonida, matematikaga qiziquvchi o‘quvchilarga sinfdan tashqari ishlarni tashkillashtirishda foydalanishi mumkin.Bundan tashqari OTMga kirish imtihonlarida , olimpiada masalalarida ham ushbu ishdan foydalanish mumkin.

1-§. Boshlang’ich funktsiya va aniqmas integral

Fan va texnikaning ko’p masalalarida funktsiya hosilasini bilgan holda, o’zini tiklash zaruriyati uchraydi. Masalan, 7-bobning 1-§ ida harakatning berilgan $s = f(t)$ tenglamasini differentsiallab, nuqtaning $\vartheta = \frac{ds}{dt}$ tezligini va yana bir marotaba differentsiallab, nuqtaning tezlanishini topish mumkinligini ko’rgan edik. Aslida, teskari masalani yechishga to’g’ri keladi, ya’ni berilgan $a = a(t)$ funktsiya uchun shunday $\vartheta = \vartheta(t)$ funktsiyani tiklash kerakki, $a = a(t)$ bu funktsiya uchun hosila vazifasini o’tasin va funktsiya uchun shunday funktsiyani topish kerakki, uning hosilasi $\vartheta = \vartheta(t)$ bo’lsin. Biz bu bobni shu masalaga bag’ishlaymiz.

1-ta’rif. *Agar $[a, b]$ oraliqning barcha nuqtalari uchun $F'(x) = f(x)$ munosabat o’rinli bo’lsa, $F(x)$ $[a, b]$ oraliqda $y = f(x)$ funktsiyaning boshlang’ich*[1] *funktsiyasi, deyiladi.*

1-*misol.* $f(x) = 2x$ funktsiya uchun ta’rifga ko’ra $F(x) = x^2$ boshlang’ich funktsiya bo’ladi, chunki $(x^2)' = 2x$.

2-*misol.* $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ funktsiyaga $F(x) = tgx$ boshlang’ich funktsiya bo’ladi, chunki $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Har bir funktsiyaning, agar mavjud bo’lsa, boshlang’ich funktsiyasi yagona emas (7-bob, 1-§ dagi teorema natijasiga qarang), ya’ni boshlang’ich funktsiyalar o’zgarmasga farq qiladi. Masalan, $x^2 + C$ har qanday C o’zgarmas son uchun $f(x) = 2x$ funktsiyaning boshlang’ich funktsiyasi bo’ladi, chunki $(x^2 + C)' = 2x$.

2-ta’rif. *Agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ ning boshlang’ichi bo’lsa, $F(x) + C$ ifoda $f(x)$ funktsiyaning aniqmas integrali deb atalib, $\int f(x)dx$ ko’rinishda belgilanadi.*

Demak, ta'rifga ko'ra, agar $F'(x) = f(x)$ bo'lsa $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'lar ekan. Bu yerda, $f(x)$ integral ostidagi funktsiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda va $\int$— integral belgisi, deb ataladi.

$\int$belgi birinchi marotaba Leybnitsning 1686 yilda chop ettirgan «Chuqur geometriya va bo'linmaslar tahlili hamda cheksizlik» memuarida uchraydi. Leybnits va Nyutonning o'sha davrdagi xatlaridan ma'lum bo'lishicha, integral tushunchasi Nyutonga ham ma'lum bo'lgan. Leybnits o'z memuarida $\int$belgi ostidagi dx ifodaning zarurligi haqida ham gapirib o'tgan. Lekin «integral» atamasini birinchi marotaba aka-uka Bernullilar ishlatgan.

Geometrik nuqtai nazardan aniqmas integral egri chiziqni Oy o'q bo'ylab parallel surish natijasida hosil bo'ladigan egri chiziqlar oilasini tasvirlaydi.

Har qanday funktsiya uchun boshlang'ich funktsiya mavjudmi, degan tabiiy savol tug'iladi. Boshlang'ich funktsiyalar faqat berilgan oraliqda uzluksiz bo'lgan funktsiyalar uchungina mavjuddir. Demak, aniqmas integral uzluksiz funktsiyalar uchun mavjud ekan. Buni biz keyingi bobda isbotlaymiz.

Berilgan $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasini topish jarayoni $f(x)$ funktsiyani integrallash, deb ataladi.

Aniqmas integral ta'rifidan bevosita quyidagilar kelib chiqadi:

1. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funktsiyaga teng, ya'ni agar $F'(x) = f(x)$ bo'lsa, u holda $(\int f(x)dx)' = f(x)$. (1)

2. Aniqmas integralning differentsiali integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx. \quad (2)$$

3. Biror funktsiya differentsialining aniqmas integrali shu funktsiya bilan o'zgarmasning yig'indisiga teng: $\int dF(x) = F(x) + C$. (3)

Hosilalar jadvali va aniqmas integral ta'rifidan foydalanib, integrallar jadvalini tuzib olish mumkin:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C=const, $n \neq -1$)
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (a>0)
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$=tg$x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$=-ctg$x + C$
9. $\int$ tg$x dx = -\ln|\cos x| + C$
10. $\int$ ctg$x dx = \ln|\sin x| + C$

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Agar A— o'zgarmas son, C — biror o'zgarmas bo'lsa, u holda

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx + C$$

bo'ladi, ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin.

2⁰. $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx + C.$

Haqiqatan, agar tenglikni o'ng tomonini differentsiallasak:

$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$

Demak, tenglikni chap va o'ng tomonlari $f(x) \pm g(x)$ ifodaning boshlang'ich funktsiyalari ekan, shu sababli ular o'zgarmasga farq qiladi.

3⁰. Agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ ning boshlang'ichi bo'lsa, u holda

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ bo'ladi.

Bu xossa ham yuqoridagidek, differentsiallab isbot qilinadi.

Misol. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{x^4 - 2x^2 + x2 \quad -2}{x^{2/3}}dx = \int \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^{2/3}}dx =$$

$$= \int (\frac{x^4}{x^{2/3}} - \frac{x^2}{x^{2/3}} - \frac{2}{x^{2/3}})dx = \int x^{10/3}dx - \int x^{4/3}dx - 2\int x^{-2/3}dx =$$

$$= \frac{x^{10/3+1}}{10/3+1} - \frac{x^{4/3+1}}{4/3+1} - 2\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} + C = \frac{3}{13}x^{13/3} - \frac{3}{7}x^{7/3} - 6x^{1/3} + C$$

Endi olingan javobning to'g'riligini tekshirish uchun undan hosila olib, integral ostidagi funktsiya bilan taqqoslaymiz:

$$(\frac{3}{13}x^{3/13} - \frac{3}{7}x^{7/3} - 6x^{1/3} + C)' = x^{10/3} - x^{4/3} - 2x^{-2/3} =$$

$$= \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^{2/3}} = \frac{x^4 - 2x^2 + x^2 - 2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2(x^2-2) + (x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Demak topilgan natija to'g'ri ekan.

2-§. Integrallashning o'rniga qo'yish usuli

Faraz qilaylik, bizda$\int f(x)dx$

integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin.

Integral ostidagi ifodada $\quad x = \phi(t),$ (1)

deb o'zgaruvchini almashtiramiz, bu yerda, $\phi(t)$— teskari funktsiyaga ega, uzluksiz differentsiallanuvchi uzluksiz funktsiya. U holda, quyidagi tenglik o'rinli:

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]d\phi(t) = \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt. \qquad (2)$$

Bu tenglikni isbotlash uchun (2) ni differentsiallaymiz. Chap tomonining hosilasi $(\int f(x)dx)'_x = f(x)$.

o'ng tomonini murakkab funktsiyadan hosila olish qoidasiga ko'ra differentsiallaymiz:

$$\left(\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} =$$
$$= f[\phi(t)]\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)} = f[\phi(t)] = f(x).$$

Oxirgi tenglikda (1) ning hosilasi $x'(t) = \phi'(t)$ va teskari funktsiyaning hosilasini hisoblash formulasiga ko'ra $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\phi\prime(t)}$ bo'lishidan foydalanildi.

Demak, (2) ning chap va o'ng tomonlaridan alohida-alohida olingan hosilalari o'zaro teng ekan, ya'ni (2) tenglikning ikkala tomonida turgan ifodalar $f(x)$ ning boshlang'ichi ekan.

Integrallashning bu usulini qo'llashdan maqsad, berilgan integralni soddaroq, yengil hisoblanadigan integralga olib kelishdan iborat. Ayrim hollarda, bu maqsadga (1) almashtirish emas, balki $t = \psi(x)$ ko'rinishdagi almashtirish tezroq olib keladi. Masalan,

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$$

ko'rinishdagi integralda $t = \psi(x)$ desak, u holda $dt = \psi'(x)dx$,

$\int \frac{\psi\prime(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|\psi(x)| + C.$

bo'ladi.

1-*misol.* $\int \frac{xdx}{1+x^2}$. Agar $t = 1 + x^2$ desak, $dt = 2xdx$ va $\int \frac{xdx}{1+x^2}. = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} ln\, t + C = \frac{1}{2} ln(1 + x^2) + C$ bo'ladi.

2-*misol.* $\int e^{x^2} xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} 2xdx = (x^2 = u, 2xdx = du) =$
$= \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

3-§. Kvadrat uchhad qatnashgan integrallar

Bunday integrallar asosan quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$1. J_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \quad 2. J_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}dx;$$
$$3. J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; 4. J_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx;$$
$$5. J_5 = \int \sqrt{ax^2 + bx + c}dx.$$

Bunday integrallarni hisoblash uchun integral ostida qatnashgan uchhaddan to'liq kvadrat ajratilib, ikkihad kvadratining algebraik yig'indisiga keltiriladi. Natijada hosil bo'lgan ifodani integrallar jadvali yordamida integrallash mumkin bo'ladi.

Kvadrat uchhaddan to'liq kvadrat quyidagicha ajratiladi:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}]=a[(x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2]$$

bu yerda, $\pm k^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$. Bunda plyus yoki minus ishora ax^2+bx+s kvadrat uchhadning ildizlari haqiqiy yoki kompleks bo'lishiga qarab aniqlanadi, ya'ni b^2-$4ac$ ni ishorasiga qarab aniqlanadi.

To'liq kvadrat ajratilgandan keyin yuqorida keltirilgan integrallar quyidagi ko'rinishni oladi:1. $J_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2}$

Bunda $x+b/2a=t$, $dx=dt$ desak, $J_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$ bu esa jadvaldagi integraldir.

4-§. Bo'laklab integrallash usuli

Bizga ikkita differentsiallanuvchi $u(x)$ va $\vartheta(x)$ funktsiyalar berilgan bo'lsin. Bu funktsiyalar ko'paytmasi $u\vartheta$ ning differentsialini topaylik. Bu differentsial quyidagicha aniqlanadi: $d(u\vartheta)=ud\vartheta+\vartheta du.$

Buning ikki tomonini hadma-had integrallab, quyidagini topamiz:

$u\vartheta=\int ud\vartheta+\int\vartheta du$ yoki $\int ud\vartheta=u\vartheta-\int\vartheta du.$

(1)

Oxirgi topilgan ifoda bo'laklab integrallash formulasi, deyiladi.

Bu formulani qo'llab integral hisoblaganda $\int ud\,\vartheta$ ko'rinishdagi integral, ancha sodda bo'lgan $\int\vartheta d\,и$ ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

Agar integral ostida u=lnx funktsiya yoki ikkita funktsiyaning ko'paytmasi hamda teskari trigonometrik funktsiyalar qatnashgan bo'lsa, bunda bo'laklab integrallash formulasi qo'llaniladi. Bu usul bilan integrallaganda yangi o'zgaruvchiga o'tishning xojati yo'q.

Umuman, aniqmas integralni hisoblaganda topilgan natija yoniga o'zgarmas (C=*const*) ni qo'shib qo'yish shart. Aks holda, integralning bitta qiymati topilib, qolganlari tashlab yuborilgan bo'ladi. Bu esa integrallashda xatolikka yo'l qo'yilgan, deb hisoblanadi.

1-*misol*. $\int x\mathrm{arctg}x dx$ ni hisoblang.

Yechish. $u=arctgx,\quad d\vartheta=xdx\quad,du=\frac{dx}{1+x^2},\quad \vartheta=\int xdx=x^2/2$

(bunda $C=0$ deb olindi). (1) formulani qo'llaymiz.

$$\int x\mathrm{arctg}x dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\int\frac{x^2}{2(1+x^2)}dx \qquad (*)$$

$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$ ni alohida hisoblaymiz

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int (1-\frac{1}{1+x^2})dx = x - \mathrm{arctg}x + C$$

buni (*) ga qo'yamiz.

$$\int x\mathrm{arctg}x dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C = -\frac{1}{2} + \frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}x + C$$

2-*misol*. $\int x\, ln\, x\, dx$ ni hisoblang.

Yechish. Agar $u = ln\, x$, $xdx = d\vartheta$ desak, $du = \frac{dx}{x}$, $\vartheta = \int xdx = \frac{x^2}{2}$ bo'ladi. U holda $\int x\, ln\, x\, dx = \frac{x^2}{2} ln\, x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} ln\, x - \frac{x^2}{4} + C.$

5-§. Ratsional kasrlarni integrallash

Ikkita algebraik $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ va $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ ko'phadlarning $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (1)

nisbati ratsional funktsiya yoki ratsional kasr, deb ataladi, bu yerda $a_n, b_m \neq 0$, $n \geq 0, m \geq 1$.Quyidag $\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k} (k \geq 2) \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} (k \geq 2),$

(2)

ko'rinishdagi ratsional funktsiyalar eng sodda ratsional kasrlar, deb ataladi, bu yerda, A, B, a, p, q – o'zgarmas sonlar, k — natural son, $x^2 + px + q$ kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas, ya'ni $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Uchinchi va to'rtinchi ko'rinishdagi ratsional funktsiyalarni integrallashni 3-§ da ko'rgan edik. Avvalgi ikkita kasrning integrali esa quyidagicha bo'ladi:

$A\int \frac{dx}{x-a} = A\, ln|x-a| + C, \quad A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Agar (1) ratsional kasrning suratida turgan ko'phadni darajasi n maxrajda turgan ko'phadning darajasi m dan kichik bo'lsa, (1) ni to'g'ri kasr, aks holda noto'g'ri kasr, deymiz.

Agar (1) noto'g'ri kasr bo'lsa, ko'phadni ko'phadga bo'lish qoidasiga ko'ra bo'lib, uni

$f(x) = ko'phad + \frac{P_{n_1}(x)}{Q_{m_1}(x)} (n_1 < m_1)$

ko'rinishga keltirish mumkin. Ko'phadni integrallashni avvalgi paragraflarda ko'rdik. Demak, har qanday ratsional funktsiyani integrallashdagi asosiy qiyinchilik to'g'ri kasrni integrallashga keltirilar ekan. Ixtiyoriy to'g'ri kasrni integrallash quyidagi teoremaga asoslanadi.

Teorema. *Agar haqiqiy to'g'ri (1) kasrning mahraji*

$Q_m(x) = b_m(x-c_1)^{k_1}\ldots(x-c_r)^{k_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}$

ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajralsa, u holda (1) yagona ravishda quyidagi:

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-c_1)^{k_1}} + \frac{A_{1,2}}{(x-c_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1,k_1}}{x-c_1} + + \frac{A_{r,1}}{(x-c_r)^{k_r}} + \frac{A_{r,2}}{(x-c_r)^{k_r-1}} + \ldots + \frac{A_{r,k_r}}{x-c_r} +$

$$+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}}+\cdots+\frac{B_{1,l_1}x+C_{1,l_1}}{x^2+p_1x+q_1}+$$

$$+\frac{B_{s,1}x+C_{s,1}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}+\frac{B_{s,2}x+C_{s,2}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}}+\cdots+\frac{B_{s,l_s}x+C_{s,l_s}}{x^2+p_sx+q_s} \qquad (3)$$

ko'rinishda eng sodda kasrlar yig'indisiga yoyiladi.

Demak, bu teoremaga ko'ra har qanday haqiqiy to'g'ri ratsional kasr uchun ko'rsatilgan indekslari bo'yicha shunday $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ o 'zgarmas sonlar topiladiki, (2) munosabat *x* ning $c_1, c_2, \rightleftarrows \cdots, c_r$ qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlari uchun bajariladi.

Bu koeffitsientlarni aniqlash uchun odatda noaniq koeffitsientlar usuli qo'llaniladi. Bu usulni birinchi marotaba I. Bernulli qo'llagan.

Bu usulni quyidagi kasr misolida ko'rsatamiz:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Tenglikning o'ng tarafini umumiy maxrajga keltirib, suratlarini tenglasak:

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2). \qquad (4)$$

tenglikning o'ng tomonini ixchamlab, tenglikning ikkala tomonidagi *x* ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglab, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$x^4: A+B=0,\quad x^3: -2B+C=0\quad x^2: 2A+B-2C+D=2,$

$x: -2B+C-2D+E=2\quad x^0: A-2C-2E=13,$ bundan

$A=1, B=-1, C=-2, D=-3, E=-4.$

Demak $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$

Xuddi shu natijaga *x* ning o'rniga ketma-ket *–1,0,1,*2 va *–2* qiymatlarni qo'yib kelsa ham bo'ladi. Bunda noma'lum koeffitsientlarni topish uchun quyidagi sistema hosil bo'ladi

$$\begin{cases}25A=25,\\ A-2C-2E=13,\\ 4A+6(B-C)+3(D-E)=13,\\ 4A-2(B+C)-(D+E)=17,\\ 25A+20(2B-C)+4(2D-E)=17.\end{cases}$$

(2) dagi qo'shiluvchi kasrlarning integralini eslasak, quyidagi xulosaga kelamiz:

Har qanday ratsional funktsiyaning integrali ratsional funktsiya, logarifmik va arktangens funktsiyalar orqali ifodalanadi.

Ko'rgazma sifatida yuqoridagi misolga qaytamiz:

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\mathrm{arctg}x+C.$$

6-§. Irratsional funktsiyalarni integrallash

Bu paragrafda biz ratsional bo'lmagan funktsiyalarni o'zgaruvchini almashtirish usuli yordamida qanday qilib ratsional ifodaga olib kelish yo'llarini, va nihoyat noratsional funktsiyalarning integrallarini almashtirish natijasida hosil bo'lgan ratsional ifodalarga 5-§ da berilgan usullarni qo'llab hisoblashni ko'ramiz. Bu — jarayonni ratsionallashtirish usuli, deyiladi.

1. $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, bu yerda a,b,c,d -o'zgarmas sonlar, m -natural son, $ad-bc\neq 0$, $R(x,y)$ - o'z argumentlariga nisbatan ratsional ifoda.

Berilgan integralni $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ almashtirish ratsionallashtiradi. Haqiqatan $t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$.

Bundan $x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a}$, $dx=\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt$.

U holda $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a},t\right)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt=\int R_1(t)dt$,

bu yerda $R_1(t)$– t ning ratsional funktsiyasi.

1-*misol*. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$.

Yechish. Agar $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ desak, $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=-\frac{6t^2dt}{(t^2-1)^2}$ bo'ladi. U holda

$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}=\int\frac{-3dt}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt==\frac{1}{2}ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\text{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$.

Integral ostidagi kvadrat uchhad tabiiy karrali ildizga ega emas, chunki aks holda integral ostidagi ifoda ratsional ifodaga aylanib qoladi. Agar u haqiqiy har xil x_1, x_2 ildizlarga ega bo'lsa, u holda $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$ deb, berilgan integral yuqorida ko'rilgan 1-tur integralga keltiriladi.

Endi, faraz qilaylik, kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas va $a>0$ bo'lsin. U holda berilgan integralni Eylerning 1-almashtirishi, deb ataluvchi

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\cdot x$$

almashtirish ratsionallashtiradi. Haqiqatan, agar bu tenglikni kvadratga ko'tarib ixchamlasak, $bx+c=t^2-2\sqrt{a}\cdot tx$ va bundan

$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$ $dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt$.

Bularni berilgan integralga olib borib qo'ysak, integral ostidagi funktsiya t ning ratsional funktsiyasiga aylanadi.

7-§. Trigonometrik funktsiyalarni o'z ichiga olgan ayrim ifodalarni integrallash

Biz shu paytgacha faqat algebraik (ratsional va irratsional) funktsiyalarni integrallashni ko'rgan bo'lsak, bu paragrafda noalgebraik funktsiyalarni, shu jumladan, trigonometrik funktsiyalar qatnashgan ifodalarni integrallashni ko'ramiz.

Bizga $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (1)

integral berilgan bo'lsin, bu yerda $R(x, y)$– o'z argumentlariga nisbatan ratsional funktsiya.

Trigonometriyadan ma'lumki, $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$.

Shu sababli, (1) ni $t = tg\frac{x}{2}$ (2)

almashtirish ratsionallashtiradi. Haqiqatan, (2) dan

$x = 2\text{arctg}t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Bularni (1) ga qo'ysak: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$.

1-*misol.* $\int \frac{dx}{\sin x}$ integralni hisoblang.

Yechish: $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

Yuqorida keltirilgan (2) almashtirish universal almashtirish, deb ataladi. Bu usul ayrim hollarda murakkab ratsional funktsiyalarga olib keladi, shuning uchun bu usul bilan bir qatorda maqsadga tezroq olib keluvchi almashtirishlar ham ishlatiladi. Shulardan ayrimlarini ko'rib chiqaylik. Avval izohlash jarayonida zarur bo'ladigan bir nechta tushunchalarni kiritib olaylik.

Agar $R(-x, y) = R(x, y)$ ($R(x, -y) = R(x, y)$) bo'lsa, $R(x, y)$ funktsiya x ga (y ga) nisbatan juft deyiladi, agar $R(-x, y) = -R(x, y)$ ($R(x, -y) = -R(x, y)$) bo'lsa, $R(x, y)$ funktsiya x ga (y ga) nisbatan toq, deyiladi.
mkin.

Agar $R(u, \vartheta)$ u ga nisbatan toq bo'lsa, uni $R(u, \vartheta) = R_2(u^2, \vartheta) \cdot u$ ko'rinishga keltirsa bo'ladi.

1. Agar $R(u, \vartheta)$ u ga nisbatan toq bo'lsa, u holda

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_2(\sin^2 x, \cos x) \sin x\, dx =$$
$$= -\int R_2(1 - \cos^2 x, \cos x)d\cos x$$

bo'ladi va demak, $t = \cos x$ almashtirish ratsional funktsiyaning integraliga olib keladi.

2-*misol.* $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t^2} = = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$.

2. Agar $R(u, \vartheta)$ ϑ ga nisbatan toq bo'lsa, u holda

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_0(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx =$$

$$= \int R_0(\sin x, 1-\sin^2 x)d\sin x$$

bo'ladi va demak, $t=\sin x$ almashtirish bilan maqsadga yetishamiz.

. Bundan berilgan integralni $t=tgx$ almashtirish ratsionallashtirishi kelib chiqadi.

4. $\boldsymbol{J_1=\int\cos m\,x\cos n\,xdx}$, $\boldsymbol{J_2=\int\sin m\,x\cos n\,xdx}$ va $\boldsymbol{J_3=\int\sin m\,x\sin n\,xdx}$ ko'rinishdagi integrallar quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$\cos m\,x\cos n\,x=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]$,

$\sin m\,x\cos n\,x=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]$,

$\sin m\,x\sin n\,x=\frac{1}{2}[-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]$.

Bularni berilgan integrallarga mos ravishda qo'yib hisoblaymiz:

$$J_1=\frac{1}{2}\int[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx=$$

$=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C.$

O'olgan ikkitasi ham shu kabi hisoblanadi.

5-*misol*. $\int\sin 5\,x\sin 3\,xdx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int\sin 5\,x\sin 3\,xdx=\frac{1}{2}\int[-\cos 8\,x+\cos 2\,x]dx=$$

$=-\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+C..$

8-§. Ayrim irratsional funktsiyalarni trigonometrik almashtirishlar yordamida integrallash

Biz 6-§ da batafsil ko'rgan

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (1)$$

integralga qaytamiz, bu yerda $a\neq 0, c-\frac{b^2}{4}\neq 0$. Bu paragrafda trigometrik almashtirishlar yordamida (1) integral **7-**§ da ko'rilgan

$$\int\overline{R}(\sin z,\cos z)dz \qquad (2)$$

integral ko'rinishiga qanday qilib keltirilishi ko'riladi.

3-§ da ax^2+bx+c kvadrat uchhad koeffitsientlarning har xil qiymatida $\sqrt{m^2t^2+n^2}$, $\sqrt{m^2t^2-n^2}$ va $\sqrt{n^2-m^2t^2}$ ifodalardan biriga keltirilishini ko'rgan edik, shuning uchun umumiylikni buzmagan holda, (1) integral

$$\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2+n^2}\right)dt, \qquad (3)$$

$$\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt, \qquad (4)$$

$$\int R\left(t,\sqrt{n^2-m^2t^2}\right)dt \qquad (5)$$

integrallarning biriga keltirilgan, deb faraz qilamiz.

Agar (3) ga $t = \frac{n}{m}\mathrm{tg}z$ almashtirishni, (4) ga $t = \frac{n}{m} sec\, z$ almashtirishni va (5) ga $t = \frac{n}{m} sin\, z$ almashtirishni qo'llasak, bu integrallar (2) integral ko'rinishiga keladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. Abduhamidov A.U., Nasimov X.A. "Algebra va matematik analiz asoslari". II qism. Akademik litseylar uchun darslik. – T., 2008 y.
2. N.Ya.Vilenkin va boshqalar. Algebra va matematik analiz. Matematika chuqur o'rgatiladigan sinflar uchun darslik. 11-sinf (rus tilida). M.:"Prosvisheniye",1995.
3. Matematikadan qo'llanma. Maktab o'qituvchilari uchun qo'llanma. II qism. (T.A.Azlarov, M.A.Sobirov, M.A.Mirzaahmedov va boshqalar).T.A.Azlarov tahr.ostida.- T.: "O'qituvchi",1979.-447 b.
4. www.edu.uz – Axborot ta'lim portali;
5. www.pedagog.uz – Malaka oshirish muassasalari sayti.