

АВТОМОРФИЗМЫ AW^* -АЛГЕБР ТИПА I

Бекматов Дилмурод Шахобиддинович

Ангрен университети Старший преподаватель

Аннотация: В работе найден общий вид автоморфизмов конечных AW^* -алгебр типа I. Структурная теория C^* -модулей начинается с работ И. Капланского, использовавшего эти объекты для алгебраического подхода к теории W^* -алгебр [1,2]. Изучение автоморфизмов операторных алгебр начинается с работы И. Капланского, доказавшего, что всякий автоморфизм AW^* -алгебры типа I, оставляющий центр неподвижным, является внутренним.

В этой заметке мы изучим общий вид автоморфизмов конечных однородных AW^* -алгебр типа I.

Ключевые слова: автоморфизм, AW^* -алгебры, C^* -модули, W^* -алгебры, *-алгебры, аннулятор, дискретность, проектор, оператор, унитарная алгебра, тождественность.

Пусть A – вещественная или комплексная *-алгебра, S – непустое подмножество A . Положим

$$R(S) = \{x \in A : sx = 0 \text{ для всех } s \in S\}$$

и назовем $R(S)$ *правым аннулятором* S . Аналогично определяется *левый аннулятор*

$$L(S) = \{x \in A : xs = 0 \text{ для всех } s \in S\}.$$

Определение 1. *-алгебра A называется *бэровской *-алгеброй*, если правый аннулятор любого непустого множества $S \subset A$ порождается проектором, т.е. $R(S) = gA$ для некоторого проектора $g \in A$ (т.е. $g^2 = g = g^*$).

Поскольку $L(S) = (R(S^*))^* = (hA)^* = Ah$, то определение симметрично и может быть дано в терминах левых аннуляторов.

Определение 2. Вещественная или комплексная C^* -алгебра A , являющаяся бэровской *-алгеброй, называется соответственно *вещественной* или *комплексной AW^* -алгеброй*.

Очевидно, что всякая вещественная (соответственно, комплексная) W^* -алгебра является вещественной (соответственно, комплексной) AW^* -алгеброй.

Вещественная или комплексная C^* -алгебра A называется *дискретной*, или *типа I*, если M изоморфна AW^* -алгебре с абелевым коммутантом.

Пусть M – W^* -алгебра типа I, z – центральный проектор в M . Предположим, что в M существует семейство $\{p_\alpha\}$ попарно ортогональных,

эквивалентных абелевых проекторов, таких, что $z = \sum p_\alpha$. Тогда кардинальное число n семейства $\{p_\alpha\}$ зависит только от M , и не зависит от выбора $\{p_\alpha\}$. Такой центральный проектор z называется n -однородным. Если $z=1$, то говорят, что M – типа I_n .

Пусть A произвольная алгебра с центром $Z(A)$ и пусть $T: A \rightarrow A$ – автоморфизм. Ясно, что T переводит $Z(A)$ на себя. На самом деле, для всех $x \in A$ и $a \in Z(A)$ имеет место

$$T(a)T(x) = T(ax) = T(xa) = T(x)T(a),$$

Это означает, что $T(a) \in Z(A)$.

Оператор $T: A \rightarrow A$ называется $Z(A)$ -линейным, если $T(ax) = aT(x)$ для всех $a \in Z(A)$ и $x \in A$. Легко видеть, что автоморфизм $T: A \rightarrow A$ унитарной алгебры является $Z(A)$ -линейной, если и только если оно тождественно на $Z(A)$.

Пусть M – AW^* -алгебра типа I_∞ с центром $Z(M)$ и $\phi: Z(M) \rightarrow Z(M)$ автоморфизм. Из [1, Теорема1] получим, что ϕ продолжается до $*$ -автоморфизмов на всю алгебру M , который обозначим через T_ϕ .

Теорема 1. Пусть M – AW^* -алгебра типа I_∞ . Тогда всякий автоморфизм T на M единственным образом представляется в виде

$$T = T_a T_\phi \quad (1)$$

где T_a внутренний автоморфизм порождённый элементом $a \in M$,

и T_ϕ $*$ -автоморфизм порождённый автоморфизмом ϕ на $Z(M)$.

Доказательство. Пусть ϕ сужение T на центр $Z(M)$. Тогда ϕ переводит $Z(M)$ себя. По [1, Теорема1] существует автоморфизм T_ϕ такое, что $T_\phi|_{Z(M)} = \phi$. Обозначим $S = T \circ T_\phi^{-1}$ так как $T|_{Z(M)} = T_\phi|_{Z(M)}$ то как $S|_{Z(M)} = id_{Z(M)}$. По теореме Капланского [2] существует элемент $a \in M$ такое, что $S = T_a$. Так как $S = T \circ T_\phi^{-1}$ то $T = T_a T_\phi$.

Предположим, что $T = T_a \circ T_\phi = T_b \circ T_\phi$, где $a, b \in M$ и ϕ, φ автоморфизмы на $Z(M)$. Тогда $T_b^{-1} \circ T_a = T_\phi \circ T_\phi^{-1}$. Отсюда $T_{b^{-1}a} = T_{\phi \circ \phi^{-1}}$ так как $T_{b^{-1}a}$ тождественно действует на центри, то $\phi \circ \phi^{-1} = id_{Z(M)}$. Это означает, что то $\phi = \phi$. Поэтому $T_a = T_b$. Теорема доказана.

Аналогичный результат для конечных однородных AW^* -алгебра был получен в [4].

Литература:

1. I. Kaplansky, Algebras of type I, Ann. of Math. 56 (1952), 460-472.
2. I. Kaplansky, Modules over operator algebras, Amer. J. Math. 75 (1953), 839-859.
3. S. Albeverio, Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov and R. Djumamuratov, Automorphisms of central extensions of type I von Neumann algebras, Studia Mathematica, № 1, (2011) 1-11.
4. Нурманов М. Ш. Автоморфизмы конечных однородных AW^* -алгебр типа I, Республиканская конференция “Математическая физика”, Бухара, 26-27 ноября 2015 г.