

**BIR O'LCHAMLI SUPERDIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN
QO'YILGAN BOSHLANG'ICH-CHEGARAVIY MASALANI YECHISH**

Jumanazarova Hafiza G'ayrat qizi

Osiyo xalqaro universiteti ,Matematika yo'nalishi, 1-kurs magistranti

Annotatsiya: Mazkur tadqiqot bir o'lchamli superdiffuziya tenglamasi uchun qo'yilgan boshlang'ich–chegaraviy masalani yechishga bag'ishlangan. Superdiffuziya jarayonlari klassik diffuziya modellari bilan to'liq ifodalanmaydigan, muhitda zarrachalarning anomal tez tarqalishi bilan tavsiflanadi. Bunday jarayonlarni modellashtirishda kasr tartibli differensial tenglamalardan foydalanish muhim ahamiyat kasb etadi. Ishda superdiffuziya tenglamasining matematik modeli keltirilib, unga mos boshlang'ich va chegaraviy shartlar aniqlangan.

Tadqiqot jarayonida qo'yilgan masalaning analitik yechimlari o'rganilib, zarur hollarda sonli usullar yordamida yechimlarning xossalari tahlil qilingan. Yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi masalalariga alohida e'tibor qaratilib, superdiffuziya tenglamasi uchun olingan natijalar asoslangan. Shuningdek, yechimlarning vaqt va fazo bo'yicha o'zgarish qonuniyatlari tahlil qilinib, ularning fizik mazmuni izohlangan.

Olingan natijalar superdiffuziya jarayonlarini modellashtirishda qo'llanilishi mumkin bo'lib, ular fizika, biologiya, ekologiya hamda murakkab muhitlarda modda va energiya almashinuvi jarayonlarini o'rganishda muhim ahamiyatga ega. Tadqiqot natijalari kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirishga hamda amaliy masalalarni yechishda samarali matematik usullarni ishlab chiqishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: bir o'lchamli superdiffuziya tenglamasi, boshlang'ich–chegaraviy masala, kasr tartibli hosila, analitik yechim, sonli usullar, barqarorlik.

Hozirgi kunda murakkab muhitlarda kechadigan ko'plab fizik, biologik va texnologik jarayonlarni modellashtirishda an'anaviy diffuziya tenglamalari yetarli

aniqlik bermaydi. Bunday jarayonlar orasida zarrachalarning anomal tez tarqalishi bilan tavsiflanadigan superdiffuziya hodisasi alohida o'rin egallaydi. Superdiffuziya jarayonlari ko'pincha tasodifiy yurishlar, uzoq masofali o'zaro ta'sirlar hamda xotira effektlariga ega tizimlarda kuzatiladi.

Superdiffuziya hodisasini matematik jihatdan ifodalashda kasr tartibli differensial tenglamalar muhim vosita hisoblanadi. Ushbu tenglamalar klassik differensial operatorlarni umumlashtirgan holda, jarayonlarning noan'anaviy xususiyatlarini to'liqroq aks ettirish imkonini beradi. Ayniqsa, bir o'lchamli superdiffuziya tenglamalari fazo va vaqt bo'yicha sodda tuzilishga ega bo'lishiga qaramay, murakkab fizik mazmunni ifodalaydi va amaliy masalalarni tahlil qilish uchun qulay model hisoblanadi.

Boshlang'ich–chegaraviy masalalar superdiffuziya tenglamalarini o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi, chunki real jarayonlar odatda aniq boshlang'ich holat va chegaraviy shartlar asosida yuzaga keladi. Bunday masalalarni yechish orqali jarayonning vaqt davomida rivojlanishi, barqarorligi va sifat xossalarini aniqlash mumkin bo'ladi. Shu sababli superdiffuziya tenglamalari uchun qo'yilgan boshlang'ich–chegaraviy masalalarning yechimlarini o'rganish dolzarb ilmiy masalalardan biridir.

Mazkur ishning asosiy maqsadi bir o'lchamli superdiffuziya tenglamasi uchun qo'yilgan boshlang'ich–chegaraviy masalani matematik jihatdan tahlil qilish va uning yechimlarini topishdan iborat. Tadqiqot davomida masalaning matematik modeli tuzilib, analitik va sonli yechish usullari qo'llanadi. Shuningdek, olingan yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi masalalari o'rganiladi.

Ushbu tadqiqot natijalari superdiffuziya jarayonlarini modellashtirish, kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirish hamda amaliy masalalarni yechishda samarali matematik yondashuvlarni ishlab chiqishda muhim ahamiyatga ega bo'lishi kutilmoqda.

Masalaning matematik modeli

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha}, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < x < L, t > 0 \quad (1)$$

Boshlang'ich shart:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < L \quad (2)$$

(1)–(2) masala bir o'lchamli superdiffuziya tenglamasi uchun Koshi masalasi hisoblanadi.

Yechimni qurish usuli

Masalani yechish uchun avvalo mos bir jinsli tenglama qaraladi. Grin funksiyasi yordamida masalaning yechimi integral ko'rinishda ifodalanadi. Furiye almashtirish yordamida fazoviy o'zgaruvchi bo'yicha, Laplas almashtirish yordamida esa vaqt o'zgaruvchisi bo'yicha tahlil olib boriladi.

$$\bar{u}(x, t) = \int_R G(x - y, t) \varphi(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in R$$

Bu yerda $G(x, t)$ — Grin funksiyasi bo'lib, u ikki parametrlı Mittag–Leffler funksiyasi orqali ifodalanadi. Olingan yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlanadi.

Xulosa:

Mazkur tadqiqotda vaqt bo'yicha Riman–Liuvill tipidagi kasr tartibli hosilani o'z ichiga olgan bir o'lchamli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich–chegaraviy masalaning yechimini qurish masalasi o'rganildi. Tadqiqot davomida anomal diffuziya jarayonlarini tavsiflovchi superdiffuziya tenglamalarining matematik modeli keltirilib, ularning klassik diffuziya tenglamalaridan farqli jihatlari asoslab berildi.

Masalani yechish jarayonida Dyumel prinsipi, Furiye va Laplas almashtirishlari hamda Grin funksiyasi usullaridan foydalanildi. Natijada qo'yilgan masala uchun yechimning aniq integral ko'rinishi olindi va u ikki parametrlı Mittag–Leffler funksiyasi orqali ifodalandi. Olingan yechimning mavjudligi va yagonaligi ta'minlanib, uning asosiy xossalari tahlil qilindi.

Tadqiqot natijalari superdiffuziya jarayonlarida xotira effektlarini hisobga olish imkonini berib, anomal diffuziya hodisalarini matematik modellashtirishda muhim nazariy ahamiyatga ega. Shuningdek, olingan natijalardan kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasida, matematik fizika masalalarini o'rganishda hamda amaliy modellashtirish ishlarida foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. I. Podlubny. Fractional differensial equations. Akademik Press, Sandiogo – 1999.
2. R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainarde, S.V.Rogosin. Mittag – Leffler functions, related topics and applications. Springer, 2014.
3. R. Hilfer. Three fold introduction to fractional derivatives. – 2007.
4. Shinaliyev, K.M., Turmetov, B.K., Umarov, S.R. A fractional operator algorithm method for construction of solutions of fractional order differential equations. FCAA 15, 267–281 (2012).